

КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ.

КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ

Господина Безу, Члена Французской Академіи Наукъ, Экзаминатора Воспитанниковъ Артиллерійскаго и Морскаго Корпусовъ, и Королевскаго Цензора.

ПЕРЕВЕДЕНЪ

Васильемъ Загорскимъ

для употребленія

БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,

Воспитывающагося

въ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСІОНѢ.

Часть Четвертая,

содержащая въ себѣ

ИСЧИСЛЕНІЕ, служащее введеніемъ въ Физико-Математическія Науки,

И ОБЩІЯ ПРАВИЛА

МЕХАНИКИ и ГИДРОСТАТИКИ.

МОСКВА, 1803.

Въ Университетской Типографіи,

у Люби, Гари и Попова.

Съ дозволенія Московской Цензуры.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ
отъ Автора.

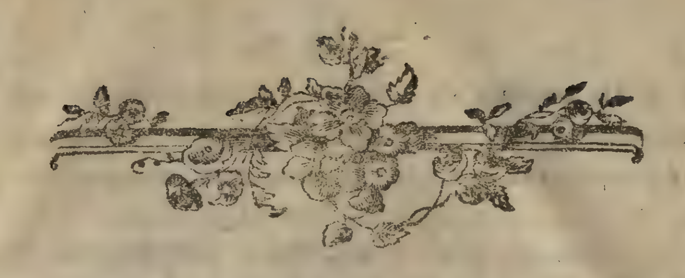
Мы помѣстили предъ общими началами Механики правила Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленія, служащія введеніемъ въ Физико-Математическія Науки, по причинѣ ихъ великой тамъ пользы. А какъ нѣкоторые изъ Читателей могутъ подумать, что мы поработили ученіе Механики симъ исчисленіямъ, то предупреждаемъ ихъ. Все, что содержатъ въ себѣ обыкновенныя Механическія книги изъясненнымъ безъ помощи объявленныхъ исчисленій, находится равно и здѣсь; такъ что желающіе ограничиться на одномъ ученіи, общемъ со всѣми прочими книгами, могутъ, не теряя связи, пропускать то, что покажется имъ имѣющимъ впечатлѣніе новаго метода.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРАВИЛА *исчисленія, служащія введеніемъ въ Физико-Математическія Науки.*

ОБЩІЯ ПРАВИЛА
МЕХАНИКИ.



ПРАВИЛА ИСЧИСЛЕНІЯ,

Служащія введеніемъ въ Физико-Математическія науки.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

1. Хотя доселѣ преподаны были всѣ правила, нужныя для исчисленія количествъ во всякомъ удобовообразимомъ состояніи ихъ величины; однако нигдѣ еще не разсматривали мы *тѣхъ перемѣнъ*, по которымъ приходятъ онѣ въ такое или другое состояніе оной. Сей новый образъ разсматриванія количествъ выводитъ новую отрасль Аналитики, которая почитается весьма нужною въ Физико-Математическихъ Наукахъ и особенно въ Механикѣ, гдѣ часто бываемъ не въ состояніи опредѣлить содержанія количествъ, заключающихся въ вопросахъ сей науки, не

узнавъ напередъ содержанія перемѣнъ ихъ, то есть, тѣхъ приращеній или убавленій, кои онѣ получаютъ въ каждую минуту.

И такъ мы намѣрены, приступая къ Механикѣ, заняться нѣсколько времени такою частію исчисленія, которая имѣетъ предметомъ раздроблять количества на ихъ начала (élémens), и отъ началъ опять поворачиваться къ самимъ количествамъ. Не нужно однако заключать изъ сего, чтобы мы имѣли намѣреніе показать новый способъ исчисленія; напротивъ мы сдѣлаемъ только примѣненіе тому, которой преподанъ былъ въ третьей части сего курса, и пояснимъ его.

2. Мы предполагаемъ себѣ два предмета. Въ первомъ изслѣдуемъ, какъ доходить по количествамъ къ ихъ началамъ: способъ, научающій тому, называется *Дифференціальнымъ исчисленіемъ*. Во второмъ покажемъ дорогу возвращаться отъ началъ количествъ къ самимъ количествамъ; способъ послѣдней цѣли называется *Интегральнымъ исчисленіемъ*.

3. Поелику мы намѣрены разсматривать количества относительно къ ихъ началамъ, то есть, относительно къ ихъ безконечно

малымъ приращеніямъ; то за приличное почитаемъ, прежде нежели приступимъ къ самой матеріи, изъяснить, что такое значатъ количества безконечно малыя, безконечныя и проч. и показать зависимость, какую должно полагать между сими количествами въ исчисленіи.

Мы называемъ одно количество безконечнымъ или безконечно малымъ въ разсужденіи другаго тогда, когда не можно означить содержанія между ими никакимъ третьимъ довольно большимъ или довольно малымъ количествомъ, то есть, когда не можно означить, сколько разъ одно изъ нихъ содержится въ другомъ.

4. Поелику количество, не переставши быть количествомъ, не можетъ сдѣлаться такимъ, которое бы не способно было еще увеличиться или уменьшиться; то нѣтъ такого малаго или такого большаго количества въ разсужденіи другаго, чтобъ не льзя было вообразить третьяго, которое бы было безконечно меньше, или безконечно больше того перваго.

На примѣръ, естьли количество *x* безконечно въ разсужденіи *a*, то хотя не можно никакимъ образомъ означить содержанія между ими; однако можно вообразить третье количество, которое бы представляло въ разсужденіи *x* тоже, что *x* представляетъ въ разсужденіи *a*, то есть, сыскать четвертой членъ

въ пропорціи, которой тремя первыми будутъ $a : x = x$; сей четвертый членъ, именно $\frac{x^2}{a}$ долженъ быть въ разсужденіи x безконечно больше, потому что онъ содержитъ въ себѣ x столько разъ, сколько x предполагается содержащимъ a. Равномѣрно ничто не препятствуетъ вообразить четвертой членъ въ слѣдующей пропорціи $x : a = a$; но сей четвертый членъ $\frac{a^2}{x}$ будетъ безконечно меньше a, потому что онъ долженъ содержаться въ a столько разъ, сколько a содержится въ x. Ничто не ограничиваетъ въ семъ случаѣ воображенія нашего; и потому можно еще допустить новое количество такое, которое было бы безконечно меньше $\frac{a^2}{x}$, такъ какъ оно само въ разсужденіи a. Сіи новыя *безконечныя* или *безконечно малыя* бываютъ разныхъ порядковъ.

Вообще произведеніе двухъ безконечныхъ или безконечно малыхъ количествъ перваго порядка бываетъ безконечно больше или безконечно меньше каждаго изъ своихъ факторовъ, и называется безконечнымъ или безконечно малымъ втораго порядка.

Ибо $xy : y = x : 1$; но естьли количество x положимъ безконечнымъ, то оно должно содержать въ себѣ безконечное число разъ единицу; слѣд. и xy должно содержать въ себѣ также y.

По той же причинѣ, произведеніе или степень произвольнаго числа измѣреній, коего всѣ факторы состоятъ изъ безконечныхъ перваго порядка, полагается въ такомъ порядкѣ, какой означается числомъ его факторовъ.

И такъ, положивъ x безконечнымъ, x^4 будетъ представлять безконечное четвертаго порядка, то есть, оно будетъ безконечно больше x^3, x^3 безконечно больше x^2, а x^2 безконечно больше x. Ибо $x^4 : x^3 = x^3 : x^2 = x^2 : x = x : 1$. Противное сему разумѣть должно, принявъ x за безконечно малое количество; тогда x^4 будетъ безконечно малое четвертаго порядка, то есть, безконечно меньше x^3, x^3 безконечно меньше x^2, а сіе послѣднее безконечно меньше x.

Но естьли не всѣ факторы произведенія будутъ представлять безконечныя количества, то порядокъ безконечности его опредѣляется въ такомъ случаѣ числомъ безконечныхъ факторовъ.

И такъ axy почитается одного порядка съ xy, ибо $axy : xy = a : 1$; но послѣднее содержаніе, предположивъ a конечнымъ количествомъ, можно опредѣлить.

Сравнивая безконечныя или безконечно малыя количества, какъ между самими ими, такъ и относительно къ количествамъ, въ разсужденіи которыхъ онѣ бываютъ безконечными или безконечно малыми, замѣчаемъ въ сравненіи такую разность: естьли x безконечно въ разсужденіи a, то ничто не можетъ измѣрить содержанія ихъ между собою; но притомъ же самомъ предположеніи, содержаніе x къ x умноженному или раздѣленному на произвольное число конечное, становится опредѣленнымъ. Безконечное или безконечно малое количество x не можетъ сравниться съ a,

когда сіе послѣднее принято будетъ за число конечное; но оно можетъ сравниться съ ax, потому что $x : ax = 1 : a$.

5. Дабы означить выкладкою, что количество x безконечно въ разсужденіи количества a, или на оборотъ, что количество a безконечно мало въ разсужденіи x, должно во всякомъ Алгебраическомъ изображеніи, гдѣ только количества сіи будутъ находиться, исключить всѣ нижнія степени x, и слѣд. всѣ члены безъ x.

На примѣръ естьли въ $\frac{3x + a}{5x + b}$ предположишь x безконечнымъ въ разсужденіи a и b, то уничтоживъ a и b, получишь $\frac{3x}{5x}$ или $\frac{3}{5}$ за величину $\frac{3x + a}{5x + b}$. Ибо $\frac{3x + a}{5x + b}$ представляетъ тоже, что $\frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}$ (по раздѣленіи числителя и знаменателя на x); но по допущеніи x безконечнымъ въ разсужденіи a и b, дроби $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$ изображающія содержанія a и b къ x, должны необходимо уничтожиться, потому что содержанія сіи остаются ниже всякаго малаго количества, какое только удобно вообразить; слѣд. данное количество по такому понятію должно превратиться въ $\frac{3}{5}$.

Равномѣрно количество $x^2 + ax + b$ будетъ тоже значить, что x^2; ибо по предположеніи x безконечнымъ, замѣчаю, что b должно уничтожить въ разсужденіи ax; но x^2 само безконечно въ разсужденіи ax, потому что $x^2 : ax = x : a$; слѣд. по той же при-

чинѣ должно изключить ax вЪ разсужденіи x^2; и слѣд. данное количество должно перемѣниться вЪ x^2.

Естьли же количество x предположено будетЪ безконечно малымЪ, то должно напротивЪ удержать тѣ только члены, вЪ которыхЪ показатель x будетЪ всѣхЪ меньше, а прочія уничтожить.

И такЪ $x^2 + ax$ превращается вЪ ax, когда x будетЪ безконечно малое количество; $\frac{ax + b}{cx + d}$ перемѣняется вЪ $\frac{b}{d}$ по такомужЪ предположенію x.

Не должно опасаться, чтобЪ такія опущенія могли сдѣлать перемѣну вЪ выводимыхЪ нами заключеніяхЪ. НапротивЪ по этимЪто опущеніямЪ выражаемЪ предположеніе свое, то есть, допускаемЪ количество x или безконечнымЪ или безконечно малымЪ. НапримѣрЪ, естьли вЪ $\frac{3x + a}{5x + b}$ или $\frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}$ принявЪ x безконечнымЪ, не изключимЪ показанныхЪ членовЪ $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$, то выкладка долженствующая изобразить вЪ такомЪ случаѣ содержаніе дробей $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$ ниже всякаго значительнаго количества, не можетЪ отвѣтствовать требованію, коимЪ предлагается узнать

величину такого количества, вЂ которомЂ x принимается за безконечное; словомЂ приписывая, что эти дроби $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$ имѣютЂ нѣкоторое вліяніе на искомую величину, мы тѣмЂ опровергаемЂ предположеніе свое.

Мы не пропустимЪ ни одного случая, гдѣ можно утвердить на самомЪ дѣлѣ истинну сего правила; а вЂ ожиданіи того вотЪ примѣрЪ, поясняющій разсужденіе наше. ВозьмемЪ порядокЪ членовЪ такого рода $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, и проч. Члены сіи, какЪ легко примѣтить можно, приближаются постепенно кЪ единицѣ, но никогда не могутЪ перейти сей границы. Каждой членЪ можно представить чрезЪ $\frac{x}{x+1}$, принявЪ за x число его. Но поелику члены непрестанно приближаются кЪ единицѣ, и тѣмЪ ближе кЪ ней подходятЪ, чѣмЪ болѣе удаляются отЪ своего начала; слѣдовательно они должны достигнуть предѣла неиначе, какЪ на безконечномЪ разстояніи отЪ онаго. И такЪ, чтобЪ получить послѣдній членЪ вЪ сей строкѣ, должно предположить вЪ $\frac{x}{x+1}$, количество x безконечнымЪ. Но вЪ сходственность правила количество сіе превращается вЪ $\frac{x}{x}$, то есть, вЪ 1; слѣдовательно опущеніе члена $+1$ вЪ $\frac{x}{x+1}$ не только не опровергаетЪ заключенія, но и дѣлаетЪ еще его сообразнымЪ сЪ предположеніемЪ нашимЪ.

Такая есть зависимость между безконечными или безконечно малыми количествами разныхЂ порядковЂ. А какЂ вЂ примѣненіяхЂ сего правила на опущеніе количествЂ

могутЪ повстрѣчаться нѣкоторые сомнительные случаи, то предупреждаемЪ читателя.

ВозьмемЪ два количества $xx + ax + b$ и $xx + ax + c$. Естьли допустишь x вЪ обоихЪ безконечнымЪ, то безЪ сомнѣнія каждое оборотится вЪ xx, такЪ что разность ихЪ должна, казалось бы, состоять изЪ нуля; однако же она вЪ самомЪ дѣлѣ выходитЪ $c - b$, или $b - c$. ВотЪ какЪ рѣшится это сумнѣніе.

Разность сія будетЪ вЪ разсужденіи самихЪ количествЪ ничто или нуль; но когда дѣло будетЪ итти о результатѣ нѣкоторыхЪ дѣйствій, произведенныхЪ надЪ ними, тогда данное правило опущенія должно употреблять вЪ самомЪ результатѣ, а не вЪ количествахЪ особенно взятыхЪ.

И такЪ сумма количествЪ — $xx + ax + b$ и . . $xx + bx + c$, когда x безконечно, должна состоять изЪ $ax + bx$; хотя вообще она выходитЪ $ax + bx + b + c$, но количество сіе по предположеніи x безконечнымЪ превращается вЪ $ax + bx$. Равномѣрно количество $x - \sqrt{(xx - bb)}$, казалось бы, должно по предположеніи x безконечнымЪ обратиться вЪ нуль; но какЪ $\sqrt{(xx - bb)}$ представляетЪ одно показаніе корня изЪ $xx - bb$, то надлежитЪ для сысканія разности между имЪ и x, представить $\sqrt{(xx - bb)}$ строкою (*Алг.* 1:3); тогда количество $x - \sqrt{(xx - bb)}$ перемѣнится вЪ $x - x + \frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3}$ и проч., или вЪ $\frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} +$ и проч. но это послѣднее, когда x будетЪ безконечнымЪ вЪ разсужденіи b, становится равно $\frac{bb}{2x}$.

О ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМЪ ИСЧИСЛЕНІИ.

6. Разсматривая измѣняемое количество возрастающимъ, или умаляющимся по безконечно малымъ степенямъ, и желая узнать величину приращеній или убавленій его, должно, какъ само по себѣ явствуетъ, опредѣлить величину того количества на одно какое нибудь мгновеніе и величину его же самаго на другое, непосредственно за тѣмъ слѣдующее: тогда разность сихъ двухъ величинъ покажетъ, какое приращеніе или убавленіе получило оное количество; такая разность перемѣннаго количества называется технически *Дифференціаломъ* его.

7. Для означенія дифференціала въ перемѣнномъ простомъ количествѣ, какъ на примѣръ въ x и y, пишемъ обыкновенно dx или dy, поставляя предъ тѣмъ перемѣннымъ начальную букву d слова дифференціалъ. Но желая означить дифференціалъ сложнаго количества, какъ x^2, или $5x^3 + 3x^2$, или $\sqrt{(x^2 - aa)}$, заключаемъ въ скобкахъ самое количество, и полагаемъ предъ нимъ букву d такъ: $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d[\sqrt{(x^2 - a^2)}]$ и проч.

Мы намѣрены впредь представлять перемѣнныя количества послѣдними Латинской азбуки буквами t, u, x, y, z; а постоянныя или тѣ, которыя сохраняютъ всегда одинакую величину, первыми a, b, c и проч. Когда же поступамъ иначе, то предупредимъ. Что касается до буквы d, то ею означать станемъ одни только дифференціалы количествъ.

8. И такъ по данному понятію о дифференціалѣ явствуетъ, что для означенія дифференціала въ такомъ количествѣ, которое заключаетъ въ себѣ одни только простыя перемѣнныя первой степени, то есть, такія перемѣнныя, которыя не умножены и не раздѣлены между собою, должно приписать къ каждому перемѣнному характеристину d, оставивъ при каждомъ членѣ тотъ же знакъ, какой онъ прежде имѣлъ.

На примѣръ, дифференціалъ количества $x + y - z$ будетъ $dx + dy - dz$ Ибо для полученія сего дифференціала, должно почитать x превратившимсяв $x + dx$, y въ $y + dy$, и z въ $z + dz$; по такому допущенію данное количество $x + y - z$ перемѣняется въ $x + dx + y + dy - z - dz$; но взявши разность между сими двумя состояніями, получимъ $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$, то есть, $dx + dy - dz$ за дифференціалъ.

Такимъ же образомъ должно поступать и съ тѣми перемѣнными, кои будутъ имѣть коэффиціентовъ или постоянныхъ множителей.

Слѣд. дифференціалъ количества $5x + 3y$ будетъ $5dx + 3dy$; дифференціалъ $ax + by$ будетъ $adx + bdy$. Ибо естьли x и y превращаются въ $x + dx$ и $y + dy$, то и количество $ax + by$ должно превратиться въ $a(x + dx) + b(y + dy)$, то есть, въ $ax + adx + by + bdy$, слѣдовательно разность обоихъ состояній или дифференціалъ будетъ $adx + bdy$; то есть, вообще для означенія дифференціаловъ простыхъ перемѣнныхъ должно поиписывать къ каждому изъ нихъ характеристику d.

Естьли данное количество будетъ имѣть постоянной членъ, то дифференціалъ сего количества выходитъ такой, какъ бы оно не имѣло постояннаго члена; то есть, дифференціалъ послѣдняго члена обращается въ нуль. Ибо дифференціалъ есть ни что другое, какъ приращеніе; но постоянное количество не можетъ имѣть дифференціала, не переставши быть постояннымъ.

И такъ дифференціалъ $ax + b$ будетъ просто adx.

9. Естьли перемѣнныя простыя количества будутъ умножены между собою, то для опредѣленія дифференціала ихъ поступай по слѣдующему правилу: *Одифференціаль порознъ каждое перемѣнное, принимая все прочее за постояннаго множителя.*

На примѣръ для означенія дифференціала xy, дифференціалю сначала, какъ бы x представляло постоянное, и пишу xdy; потомъ дифференціалю то же xy, какъ бы y представляло постоянное, и получаю ydx; такимъ образомъ дифференціалъ всего xy будетъ $xdy + ydx$.

Причину этого правила найдемъ поворотившись къ началу. Дабы получить дифференціалъ xy, должно представить x перемѣняющимся въ $x + dx$, то есть, увеличивающимся на количество безконечно малое dx, а y превращающимся въ $y + dy$, то есть, увеличивающимся на безконечно малое количество dy: послѣ чего xy становится равнымъ $(x + dx)(y + dy)$, то есть, $xy + xdy + ydx + dydx$; слѣдовательно разность двухъ состояній или дифференціалъ будетъ $xy + xdy + ydx + dydx - xy$, или $xdy + ydx + dydx$; наконецъ показывая исчисленіемъ, что dx и dy суть по предложенію количества безконечно малыя, должно (5) опустить $dydx$, которое представляетъ (4) безконечно малое втораго порядка, и слѣдовательно безконечно малое въ разсужденіи xdy и ydx, кои суть безконечно малыя перваго порядка: и такъ дифференціалъ xy или $d(xy)$ есть $xdy + ydx$ такой же, какой выводитъ правило.

Такимъ же образомъ найдемъ, поступая по предписанному правилу, что дифференціалъ xyz будетъ $xydz + xzdy + zydx$, одифференціаливъ сначала, какъ бы xy, потомъ какъ бы xz и наконецъ какъ бы yz изображали постоянныя количества. Въ истиннѣ сего можно увѣриться предыдущимъ доказательствомъ.

10. Естьли данное количество представляетъ степень какого нибудь перемѣннаго количества, то поступай по слѣдующему правилу: ***Умножь показателя на перемѣнное съ показателемъ, уменьшеннымъ единицою, и еще умножь на дифференціалъ перемѣннаго.***

И такъ применяя это правило къ x^2, получу дифференціаломъ его $2xdx$, умноживъ показателя 2 на x^{2-1}, или на x, и умноживъ наконецъ на дифференціалъ dx перемѣннаго x. Такимъ же образомъ найдемъ, что дифференціалы количествъ x^3, x^4, x^{-1}, x^{-3}, $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{4}{3}}$,

будутъ относительно къ каждому $3x^2 dx$, $4x^3 dx$, $-x^{-2} dx$, $-3x^{-4} dx$, $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$, $\frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} dx$; вообще дифференцïалъ x^m состоитъ изъ $mx^{m-1} dx$, какой бы показатель m ни былъ, положительной или отрицательной, цѣлой или дробной.

Дабы увѣриться въ истиннѣ сего правила, то поворотимся еще къ началу. Вообразимъ x перемѣнившимся въ $x + dx$, (dx представляетъ безконечно малое); послѣ чего x^m превращается въ $(x + dx)^m$, то есть, по правиламъ (*Алг.* 126) въ $x^m + mx^{m-1} dx + m. \frac{m-1}{2} x^{m-2} dx^2 +$ и проч. или (потому что членъ $m. \frac{m-1}{2} . x^{m-2} dx^2$ представляетъ безконечно малое втораго порядка, и что послѣдующïе члены будутъ еще ниже того порядка) въ $x^m + mx^{m-1} dx$; слѣдовательно разность двухъ состоянïй или дифференцïалъ x^m, долженъ быть $x^m + mx^{m-1} dx - x^m$, то есть, $mx^{m-1} dx$

Естьли случится при перемѣнномъ количествѣ коеффицïентъ, или постоянной множитель, то онъ остается безъ всякой перемѣны и въ дифференцïалѣ его; на пр. $d(ax^m)$ будетъ $max^{m-1} dx$.

11. Вотъ все то, что нужно знать для дифференцïацïи всякаго рода Алгебраическихъ количествъ; послѣдующее будетъ служить принаровкою симъ правиламъ.

12. Естьли будетъ дано сыскать дифференцïалъ для дроби $\frac{x}{y}$, то представивъ ее (*Алг.* 118) въ такомъ видѣ xy^{-1}, получишь по правилу (9) $d(xy^{-1}) = xd(y^{-1}) + y^{-1} dx$; и слѣдовательно (10) $d(xy^{-1}) = -xy^{-2} dy + y^{-1} dx$. По приведенïи сего количе-

чества, выходитЪ $-\frac{xdy}{y^2}+\frac{dx}{y}$, или $\frac{ydx-xdy}{y^2}$; отсюда слѣдуетЪ, что дифференціалЪ дроби $\frac{x}{y}$ равенЪ разности дифференціала dx числителя умноженнаго на знаменателя безЪ дифференціала dy знаменателя, умноженнаго на числителя x, раздѣленной на квадратЪ знаменателя. Это правило служитЪ вообще для дифференціаловЪ дробей.

13. Естьли потребуется сыскать дифференціалЪ для ax^3y^2, то принявЪ сначала x^3 и y^2 за простыя перемѣнныя количества, получишь (9) $d(ax^3y^2)= ax^3d(y^2)+ay^2d(x^3)$; потомЪ (10) $d(ax^3y^2)= 2ax^3ydy+3ay^2x^2dx$. Вообще $d(ax^my^n)=ax^md(y^n)+ay^nd(x^m)=nax^my^{n-1}dy+may^nx^{m-1}dx$.

14. Естьли количество, для коего ищешь дифференціалЪ, будетЪ многочленное и не вЪ степени, то должно одифференціалить вЪ особенности каждой его членЪ; на примѣрЪ $d(ax^3+bx^2+cxy)=3ax^2dx+2bxdx+cxdy+cydx$. РавнымЪ образомЪ $d\left(ax^2+bx+\frac{cy}{x^2}\right)=d(ax^2+bx+cyx^{-2})=2axdx+bdx-2cx^{-3}ydx+cx^{-2}dy$; и наконецЪ $d(x^3y+ay^2+b^3)=3x^2ydx+x^3dy+2aydy$, припомнивЪ, что постоянное b^3 не имѣетЪ дифференціала.

15. Естьли же случится показатель, какЪ на примѣрЪ вЪ $(a+bx+cx^2)^5$, то принявЪ все количество сЪ показателемЪ его за одно перемѣнное, сыщи дифференціалЪ по правилу (10) для степеней; такимЪ образомЪ $d(a+bx+cx^2)^5=5(a+bx+cx^2)^4\times d(a+bx+cx^2)=5(a+bx+cx^2)^4\times(bdx+2cxdx)$. Равномѣрно $d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}d(a+bx^2)=\frac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}\times 2bxdx=\frac{10}{3}bxdx(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16. Естьли многочленное количество будетъ состоять изъ разныхъ факторовъ; то принявъ каждаго фактора за простое перемѣнное, поступай по правилу, данному (9) для произведенія многихъ простыхъ перемѣнныхъ; такимъ образомъ изъ $x^3 (a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$, которое можно почитать состоящимъ изъ двухъ факторовъ x^3 и $(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$, выдетъ $d[x^3 (a+bx^2)^{\frac{5}{3}}] = (a+bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$; это количество по предыдущимъ правиламъ обращается въ $3x^2 dx (a+bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3} bx^4 dx (a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Равномѣрно $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) = d[(x+a)^3 \times (x+b)^{-2}] = (x+a)^3 d(x+b)^{-2} + (x+b)^{-2} d(x+a)^3$, то есть, $= -2(x+a)^3 (x+b)^{-3} dx + 3(x+b)^{-2} (x+a)^2 dx$, которое можно перемѣнить въ $-\frac{2(x+a)^3 dx}{(x+b)^3} + \frac{3(x+a)^2 dx}{(x+b)^2}$, и по томъ привести въ $\frac{(x+3b-2a)(x+a)^2 dx}{(x+b)^3}$.

17. Естьли данное количество будетъ радикальное, то поставивъ вмѣсто радикаловъ дробные показатели, какъ было предписано (*Алг.* 105), одифференціалъ по томъ оное по предыдущимъ правиламъ. На примѣръ $d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$; $d(\sqrt[5]{x^3}) = d(x^{\frac{3}{5}}) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} dx$, $d[\sqrt{(aa-xx)}] = d(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} d(aa-xx) = -xdx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; $d\left(x^m \sqrt[q]{[(a+bx^n)^p]}\right) = d[x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}] = x^m d(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} d(x^m) = \frac{pnb}{q} x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} + mx^{m-1} dx.(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

О Дифференціалахъ вторыхъ, третьихъ и проч.

18. Сверхъ дифференціаловъ, о которыхъ мы разсуждали теперь, и которые называются *первыми*, находятся еще *вторые*, *третьи* и проч. Для означенія вторыхъ дифференціаловъ ставимъ предъ перемѣннымъ двѣ буквы d, три d, когда дѣло идетъ о третьихъ, и такъ далѣе; на примѣръ ddx показываетъ второй дифференціалъ перемѣннаго x.

При изысканіи вторыхъ дифференціаловъ принимаемъ перемѣнное усугубляюшимся по неравнымъ степенямъ, которыхъ разность бываетъ безконечно мала въ разсужденіи самыхъ приращеній. Такимъ образомъ ddx есть безконечно малое въ разсужденіи dx. Равномѣрно въ третьихъ дифференціалахъ $dddx$ или d^3x (сіи дифференціалы можно означать двояко), есть безконечно малое въ разсужденіи ddx; и такъ и проч.

Для означенія квадрата dx слѣдовало бы, казалось, написать $(dx)^2$; однако для простоты пишемъ dx^2: въ этомъ изображеніи не можно сдѣлать ошибки и принять его за дифференціалъ x^2, которой согласились мы означать такъ $d(x^2)$.

Замѣтимъ, что ddx и dx^2 суть оба безконечно малыя втораго порядка, хотя впрочемъ не равны между собою; количество ddx представляетъ второй дифференціалъ x, или разность двухъ послѣдующихъ дифференціаловъ x; но dx^2 есть квадратъ изъ dx.

Способъ представлять вторые дифференціалы состоитъ въ слѣдующемъ: должно разсмотрѣть перемѣнное количество въ трехъ его послѣдовательныхъ состояніяхъ, безконечно между собою близкихъ; узнать разность втораго состоянія съ первымъ, третьяго со вторымъ; и наконецъ найти разность между этими двумя разностями. На примѣръ, первое состояніе x есть x, во второмъ мгновеніи x увеличивается количествомъ dx и становится $x + dx$, въ послѣдующемъ мгновеніи $x + dx$ увеличивается количествомъ $dx + d(dx)$; $d(dx)$ означаетъ то, чѣмъ прибавленіе во второе мгновеніе превосходитъ первое, или означаетъ дифференціалъ dx. Такимъ образомъ три послѣдовательныя состоянія количества x будутъ x, $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. Разность втораго съ первымъ есть dx, третьяго со вторымъ $dx + d(dx)$; наконецъ разность обѣихъ сихъ разностей, или второй дифференціалъ x состоитъ изъ $d(dx)$; слѣдовательно $ddx = d(dx)$. Слѣ-

довательно *для опредѣленія вторыхъ дифференціаловъ должно одифференціалить первые по тѣмъ же самымъ правиламъ, какія были предписаны выше.*

На примѣръ, для полученія втораго дифференціала xy беру его первой $xdy + ydx$; дифференціалю теперь этотъ какъ бы x и dx, y и dy были разныя перемѣнныя, и нахожу $xddy + dydx + dydx + yddx$, или $xddy + 2dydx + yddx$. Такимъ же образомъ найду второй дифференціалъ x^2, взявши сначала первой $2xdx$; потомъ дифференціалю $2xdx$, какъ бы x и dx были два конечныя перемѣнныя, и получаю $2xddx + 2dx^2$. Равномѣрно $dd\,(ax^m) = d\,(max^{m-1}dx) = m.(m-1)\,ax^{m-2}dx + max^{m-1}ddx$ (*).

Естьли случится дифференціалить количество, въ которомъ находятся уже первые дифференціалы, сысканные вточности или нѣтъ, то поступай такимъ же образомъ. На примѣръ $d\,(xdy) = xddy + dxdy$. Равномѣрно $d\left(\frac{dy}{x}\right) = d\left(x^{-1}dy\right) = -x^{-2}dxdy + x^{-1}ddy$. Также $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d\left(dxdy^{-1}\right) = ddxdy^{-1} - dxdy^{-2}ddy = \frac{ddx}{dy} - \frac{dxddy}{dy^2}$.

(*) Дабы при изысканіи сихъ вторыхъ дифференціаловъ не имѣть никакого сумнѣнія, то предупреждаемъ: опредѣляя первые дифференціалы, мы предписали изключать количества безконечно малыя втораго порядка; а какъ вторые дифференціалы суть также безконечно малыя втораго порядка, то и не должно опасаться, чтобъ изключенное въ первыхъ сдѣлало какой нибудь недостатокъ въ этихъ вторыхъ; потому что безконечно малое втораго порядка производитъ въ дифференціалѣ своемъ безконечно малое третьяго порядка, которое должно быть изключено относительно ко второму дифференціалу.

19. Не рѣдко случается, что въ исчисленіяхъ, гдѣ входитъ много перемѣнныхъ, принимаемъ первой дифференціалъ одного какого нибудь изъ нихъ за постоянное количество. Такое допущеніе позволительно и дѣлаетъ проще выкладку, потому что члены со вторымъ дифференціаломъ того же перемѣннаго уничтожаются; ибо, принявъ на примѣръ dx за постоянное, получаемъ $ddx = o$, а это уничтожаетъ всѣ члены, въ которыхъ находятся ddx. Слѣдовательно одно только вниманіе должно имѣть, чтобъ не дифференціалить dx (или постоянной дифференціалъ) во всѣхъ членахъ, гдѣ онъ будетъ находиться.

Такимъ образомъ дифференціалъ $\frac{dx}{dy}$, по предположеніи dx постояннымъ, или $d\,(dxdy^{-1})$ будетъ $-\,dxdy^{-2}\,ddy$, или $-\frac{dxddy}{dy^2}$. Естьли же примешь dy за постоянное, то получишь $\frac{ddx}{dy}$.

20. Что касается до третьихъ дифференціаловъ, то въ сходственность предыдущихъ разсужденій нашихъ, должно для опредѣленія ихъ дифференціалить обыкновеннымъ образомъ вторые дифференціалы, принявъ самыя перемѣнныя, ихъ первые и вторые дифференціалы за столько разныхъ перемѣнныхъ, сколько ихъ числомъ будетъ; тоже

должно заключить и о прочихъ вышнихъ дифференціалахъ. Надобно только помнить, что естьли при переходѣ отъ первыхъ дифференціаловъ ко вторымъ, одинъ изъ первыхъ принятъ былъ за постоянное количество, то должно почитать его такимъ же во всѣхъ прочихъ дифференціалахъ.

ПРИМѢЧАНІЕ.

21. Хотя мы выше допустили, что всѣ перемѣнныя x, y и проч. сколькобъ ихъ числомъ ни было, увеличиваются въ одно время, то есть: тогда, когда x становится $x+dx$, y превращается въ $y+dy$ и такъ и проч. Однако можетъ случиться, что нѣкоторыя будутъ уменьшаться въ то время, какъ другія увеличиваться. Въ сходственность сего должно ставить предъ дифференціалами такого рода перемѣнныхъ знакъ —, или можно ихъ оставлять такими же, какими они выходятъ изъ предыдущихъ правилъ; только примѣняя рѣшеніе къ самому вопросу, надобно употреблять дифференціалъ убывающаго перемѣннаго отрицательно.

Ибо естьли y уменшится количествомъ q, а мы предположимъ въ дифференціалѣ y сдѣлавшимся $y+dy$, то должно въ такомъ случаѣ, чтобъ $y-q=y+dy$, или $-q=dy$, или $q=-dy$; слѣд. принимая въ такомъ смыслѣ перемѣнное, должно употреблять $-dy$ вмѣсто dy. Въ послѣдствіи мы не преминемъ показать это на самомъ дѣлѣ.

ТожЪ должно наблюдать и во вторыхЪ дифференціалахЪ. Естьли первой дифференціалЪ представляетЪ убывающее количество, то и во второмЪ принимай — *ddy* вмѣсто *ddy*.

Таковы суть правила для дифференціаловЪ количествЪ, представляемыхЪ вообще. Однако не рѣдко случается намЪ производить дѣйствіе не надЪ самими количествами, а надЪ нѣкоторыми ихЪ изображеніями. На примѣрЪ, мы иногда употребляемЪ вмѣсто угловЪ синусы ихЪ, тангенсы и проч., принимаемЪ логариѳмы количествЪ за самыя количества. ПосмотримЪ же теперь, какЪ должно дифференціалить такого рода выраженія.

О ДифференціалахЪ СинусовЪ, Косинусовъ и прос.

22. Естьли станешь дифференціалить такое количество, какЪ *син.* z (то есть, синусЪ угла или дуги z), то должно вообразить уголЪ z превращающимся вЪ $z + dz$; тогда *син.* $(z + dz)$ — *син.* z будетЪ дифференціалЪ *син.* z. Но по обЪявленному (*Геом.* 286) *син.* $z + dz =$ *син.* z *кос.* $dz +$ *син.* dz *кос.* z, по предположеніи радіуса $= 1$. А какЪ синусЪ дуги безконечно малой есть самая дуга, и косинусЪ ея ничѣмЪ не разнится отЪ радіуса, то вЪ сходственность сего *син.* $dz = dz$, а *кос.* $dz = 1$, слѣд. *син.* $(z + dz) =$ *син.* $z + dz$ *кос.* z; слѣд.

син. $(z + dz)$ — *син.* z, или d (*син.* z) $= dz$ *кос.* z; то есть, *дифференціалъ синуса угла или дуги, которой радіусомъ принимается единица, выходитъ изъ умноженія дифференціала угла на косинусъ того же угла.*

23. Равномѣрно дифференціалъ *кос.* z, или *кос.* $(z + dz)$ — *кос.* $z =$ *кос.* z *кос.* dz — *син.* z *син.* dz — *кос.* z, потому что (*Геом.* 287) *кос.* $(z + dz) =$ *кос.* z *кос.* dz — *син.* z *син.* dz; слѣд. припомнивъ, что *син.* $dz = dz$, а *кос.* $dz = 1$, получимъ d (*кос.* z) $=$ *кос.* $z - dz$ *син.* z — *кос.* $z = dz$ *син.* z; то есть, *для опредѣленія дифференціала косинуса какого нибудь угла, коего радіусъ предположенъ равнымъ* 1, *должно умножить дифференціалъ того угла (дифференціалъ, взятой съ противнымъ знакомъ), на синусъ его же.*

И такъ d (*син.* z) $= dz$ *кос.* z, а d (*кос.* z) $= - dz$ *син.* z.

При помощи сихъ двухъ правилъ и предъидущихъ можно теперь дифференціалить всякое количество, состоящее изъ синусовъ и косинусовъ.

На примѣръ, желая узнать дифференціалъ *кос.* $3z$, получу d (*кос.* $3z$) $= - 3dz$ *син.* $3z$. Равномѣрно d (*кос* mz), здѣсь m представляетъ постоянное число, $= - mdz$ *син.* mz; а d (*син.* mz) $= mdz$ *кос.* mz.

Такимъ же образомъ $d(\text{син } z \text{ кос. } t) = \text{кос. } t \times d(\text{син. } z) + \text{син. } z \times d(\text{кос. } t) = dz \text{ кос. } t \text{ кос. } z - dt \text{ син. } z \text{ син. } t$. Наконецъ $d(\text{син. } z)^m = m(\text{син. } z)^{m-1} d(\text{син. } z) = mdz \text{ кос. } z (\text{син. } z)^{m-1}$

24. Естьли будетъ дано такое количество $\frac{\text{син. } z}{\text{кос. } z}$, которое, по предположенїи радїуса равнымъ 1, изображаетъ тангенсъ угла z, потому что (Геом. 282) $\text{кос. } z : 1 = \text{син. } z : \text{танг. } z$; слѣд. $d\left(\frac{\text{син. } z}{\text{кос. } z}\right) = d\left[(\text{син. } z)(\text{кос. } z)^{-1}\right] = dz \text{ кос. } z (\text{кос. } z)^{-1} + dz (\text{син. } z)^2 (\text{кос. } z)^{-2} = \frac{dz \text{ кос. } z}{\text{кос. } z} + \frac{dz (\text{син. } z)^2}{(\text{кос. } z)^2} = \frac{dz(\text{кос. } z)^2 + dz(\text{син. } z)^2}{(\text{кос. } z)^2} = \frac{dz}{(\text{кос. } z)^2}$, ибо (Геом. 283) $(\text{кос. } z)^2 + (\text{син. } z)^2 = 1$.

Слѣд. *Дифференцїалъ тангенса всякаго угла, коего радїусъ = 1, состоитъ изъ дифференцїала того же угла, раздѣленнаго на квадратъ косинуса его.*

Отсюда можно заключить, что дифференцїалъ самаго угла равняется дифференцїалу тангенса его, умноженному на квадратъ косинуса; ибо нашли мы, что $d\left(\frac{\text{син. } z}{\text{кос. } z}\right)$, или $d(\text{танг. } z) = \frac{dz}{(\text{кос. } z)^2}$, слѣд. $dz = (\text{кос. } z)^2 d(\text{танг. } z)$.

25 Естьли же будетъ дано количество $\frac{\text{кос. } z}{\text{син. } z}$, изображающее котангенсъ угла z, то $d\left(\frac{\text{кос. } z}{\text{син. } z}\right) = \ldots d[(\text{кос. } z)(\text{син. } z)^{-1}] = -dz \text{ син. } z (\text{син. } z)^{-1} - dz (\text{кос. } z)^2 (\text{син. } z)^{-2} = -\frac{dz \text{ син. } z}{\text{син. } z} - \frac{dz(\text{кос. } z)^2}{(\text{син. } z)^2} = \frac{-dz(\text{син. } z)^2 - dz(\text{кос. } z)^2}{(\text{син. } z)^2} = \frac{-dz}{(\text{син. } z)^2}$; слѣд. *дифференцїалъ котангенса угла равенъ дифференцїалу самаго угла (взятому съ отрицательнымъ знакомъ), раздѣленному на квадратъ синуса его.* Мы увидимъ послѣ употребленїе этихъ дифференцїаловъ.

О Дифференціалахъ Логариѳмовъ.

26. Припомнимъ (*Ариѳ.* 200), что логариѳмы представляютъ рядъ чиселъ какой нибудь Ариѳметической прогрессіи, которая отвѣчаетъ членами своими другому ряду чиселъ въ Геометрической прогрессіи.

По допущеніи сего, положимъ, что y и y' изображаютъ два члена, одинъ за другимъ слѣдующіе въ Геометрической прогрессіи, въ которой r означаетъ знаменателя содержанія, а a и a' два первые члена. Примемъ равномѣрно x и x' за два послѣдовательные члена Ариѳметической прогрессіи, которой первыми двумя суть b и b'. Допустимъ сверхъ сего, что x и x' стоятъ на тѣхъ же мѣстахъ въ Ариѳметической прогрессіи, на какихъ y и y' въ Геометрической; въ такомъ случаѣ x и x' должно почитать за логариѳмы y и y'.

По свойству Геометрической прогрессіи (*Ариѳ.* 195) выходитъ $y' = ry$, и $a' = ra'$; вставивъ въ первомъ уравненіи величину r, выведенную изъ втораго, получимъ $y' = \frac{a'y}{a}$, или $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$. Положимъ теперь, что разность между y' и y есть z, или $y' = y + z$; въ такомъ случаѣ $\frac{y+z}{y}$, или $1 + \frac{z}{y} = \frac{a'}{a}$,

и слѣд. $\frac{z}{y} = \frac{a'}{a} - 1 = \frac{a' - a}{a}$, или $\frac{az}{y} = a' - a$.

Съ другой стороны по свойству Ариѳметической прогрессіи (*Ариѳ.* 188) находимъ $x' - x = b' - b$.

Дабы узнать отношеніе сихъ двухъ прогрессій, положимъ, что разность $a' - a$ двухъ первыхъ членовъ Геометрической къ разности $b' - b$ двухъ первыхъ членовъ Ариѳметической содержится какъ единица къ какому нибудь числу m, то есть, что $a' - a : b' - b = 1 : m$; послѣ чего получимъ $m(a' - a) = b' - b$; вставивъ въ семъ уравненіи вмѣсто $a' - a$ и $b' - b$ найденныя ихъ величины, будемъ имѣть $\frac{maz}{y} = x' - x$ такое уравненіе, которое изображаетъ вообще отношеніе всякой Геометрической прогрессіи къ сходственной Ариѳметической.

Вообразимъ теперь, что въ обѣихъ прогрессіяхъ каждые два послѣдовательные члены безконечно близки въ величинѣ своей; въ такомъ случаѣ количество z, означающее разность между y' и y будетъ равно dy, а количество $x' - x$, означающее разность между x' и x будетъ dx; въ силу этого допущенія уравненіе превращается въ $\frac{mady}{y} =$

dx. Что касается до количества m, показывающаго содержаніе разности двухъ первыхъ членовъ Ариѳметической прогрессіи къ разности двухъ первыхъ членовъ Геометрической, то оно, хотя обѣ сіи разности безконечно малы, будетъ однакожъ представлять конечное число; ибо не трудно понять, что два количества безконечно малыя могутъ содержаться одно въ другомъ также, какъ и количества конечныя.

И такъ уравненіе $\frac{mady}{y} = dx$ показываетъ намъ, что дифференціалъ dx логариѳма какого нибудь числа, означеннаго y, равенъ дифференціалу его dy, раздѣленному на тоже число y, и умноженному на первой членъ a начальной Геометрической прогрессіи и на число m, означающее содержаніе разности двухъ первыхъ членовъ Ариѳметической прогрессіи къ двумъ первымъ Геометрической. Это число m, показывающее нѣкоторымъ образомъ содержаніе обѣихъ прогрессій, называется *модулюсъ*.

И такъ глядя по величинѣ m и по первому члену a Геометрической прогрессіи, одно и тожъ число y можетъ имѣть разные логариѳмы. Но изъ всѣхъ системъ легчайшею въ Алгебраическихъ выкладкахъ почитается

та, въ которой первой членъ Геометрической прогрессіи будетъ 1, и модулюсъ 1. По такому предположенію уравненіе $\frac{mady}{y} = dx$, заключающее въ себѣ разныя системы логариѳмовъ, превращается въ $\frac{dy}{y} = dx$.

27. Слѣд. по системѣ логариѳмовъ, употребляемыхъ въ Алгебраическомъ исчисленіи, *дифференціалъ dx логариѳма x какого нибудь числа y, равенъ дифференціалу его dy, раздѣленному на тоже число y*. Вотъ главное правило, по которому сыскивается вообще дифференціалъ логариѳма всякаго Алгебраическаго количества; но прежде нежели сдѣлаемъ изъ него употребленіе, замѣтимъ 1е. что логариѳмы, о которыхъ теперь дѣло идетъ, не таковы, каковы содержатся въ обыкновенныхъ таблицахъ; хотя весьма легко можно дѣлать переходъ отъ однихъ къ другимъ, какъ мы то увидимъ послѣ.

2е. Поелику первой членъ *b* Ариѳметической прогрессіи не находится въ уравненіи $\frac{mady}{y} = dx$, то уравненіе сіе, равно какъ и выведенное изъ него частное $\frac{dy}{y} = dx$ остаются всегда одинаковы, каковъ бы ни былъ

первой членъ b, то есть, логариѳмъ перваго члена a Геометрической прогрессіи. И такъ мы вольны для легкости предположить логариѳмъ перваго члена равнымъ нулю; а какъ мы положили въ принятой Геометрической прогрессіи за первой членъ единицу, то нуль будетъ въ такомъ случаѣ логариѳмомъ единицы; однако надобно твердо помнить, что это допущеніе совершенно произвольное.

Принимая такимъ образомъ единицу за первой членъ Геометрической прогрессіи, а нуль за первой же Ариѳметической, или за логариѳмъ единицы, можемъ свободно употреблять здѣсь тѣ правила, которыя преподаны были (*Ариѳ.* 207 и слѣд.) для логариѳмовъ. Такимъ образомъ припомнивъ ихъ и сдѣлавъ изъ нихъ заключенія общія, увидимъ, что за $l(ab)$ можно принять $la + lb$, l значитъ *логариѳмъ*. Равномѣрно $l\frac{a}{b} = la - lb$. Также $la^m = mla$; наконецъ . . . $l\sqrt[n]{a^m} = la^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}la$.

Естьли по предположеніи сего примѣнимъ правило, данное для дифференціаціи логарифма какого нибудь числа, то получимъ $dlx = \frac{dx}{x}$; $dl\,(a+x) = \frac{d\,(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d\,[la - l\,(a+x)]$

$= \frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, замѣтивъ, что дифференціалъ постояннаго la есть нуль.

Равномѣрно $dl\frac{1}{x} = d(l1 - lx) = -\frac{dx}{x}$; $dl(x^2) = d(2lx) = \frac{2dx}{x}$; $dl(xy) = d(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$; $d\left(\frac{lx}{y}\right) = d(lx - ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $dl\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = d[l(a+x) - l(a-x)] = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$; $d[l(aa + xx)] = \frac{d(aa+xx)}{aa+xx} = \frac{2xdx}{aa+xx}$; $dl\sqrt{(aa+xx)} = \frac{d\sqrt{(aa+xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{aa+xx}$, или еще проще $dl\sqrt{(aa+xx)} = d[\frac{1}{2}l(aa+xx)] = \frac{xdx}{aa+xx}$; $dl[x^m(a+bx^n)^p] = d[lx^m + l(a+bx^n)^p] = d[mlx + pl(a+bx^n)] = \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}$. Довольно этихъ примѣровъ, чтобъ понять, какимъ образомъ должно дифференціалить логариѳмы всякихъ другихъ количествъ.

О Дифференціалахъ количествъ съ перемѣнными показателями степеней.

28. Встрѣчаются еще иногда количества такого виду c^x, x^y; то есть, количества съ перемѣннымъ показателемъ. Ихъ называютъ вообще *показательными* количествами.

Чтобъ узнать, какъ дифференціалить эти количества, положимъ $x^y = z$; въ такомъ случаѣ взявши

логариѳмы каждой части, получимъ $lx^y = lz$, и слѣд. $dl(x^y) = \frac{dz}{z}$; слѣд. $dz = zdl(x^y)$, или (вставивъ вмѣсто z и dz величины ихъ) $d(x^y) = x^y dl(x^y)$; то есть, *дифференціалъ показательнаго количества происходитъ изъ умноженія самаго количества на дифференціалъ логариѳма его.*

Такимъ образомъ $d(x^y) = x^y d(lx^y) = x^y d$ .. $(ylx) = x^y(dylx + \frac{ydx}{x})$. Равномѣрно $d(a^x + y^z) = d(a^x) + d(y^z) = a^x d(la^x) y^z d(ly^z) = a^x d(xla) + y^z d(zly) = a^x dxla + y^z(dzly + \frac{zdy}{y})$. Также $d(aa + xx)^x = (aa+xx)^x dl(aa+xx)^x = (aa+xx)^x$ ... $d[xl(aa+xx)] = (aa+xx)^x [dxl(aa+xx) + \frac{2x^2dx}{aa+xx}]$, и такъ далѣе. Часто употребляется въ исчисленіяхъ показательное количество c^x; c представляетъ такое количество, коего логариѳмъ $= 1$. Дифференціалъ этаго количества состоитъ, какъ означено выше, изъ $c^x.d(lc^x)$, или $c^x d(xlc) = c^x.dxlc$; а какъ lc предположенъ $= 1$, то получимъ просто $d(c^x) = dxc^x$. Слѣд. особенное это показательное количество имѣетъ дифференціаломъ тоже самое количество, умноженное на дифференціалъ показателя его. Въ послѣдствіи мы будемъ имѣть еще случай говорить о немъ.

Примѣненіе предыдущихъ правилъ.

29. Дабы узнать на самыхъ примѣрахъ употребленіе изъясненныхъ правилъ, и ихъ

преимущество въ разсужденіи обыкновенной Алгебры, то применимъ ихъ къ извѣстнымъ намъ предметамъ, именно къ Геометрическимъ и Алгебраическимъ вопросамъ.

Примѣненіе къ Субтангенсамъ, Тангенсамъ, Субнормалямъ и проч. кривыхъ линей.

30. Для проведенія тангенса къ какой нибудь кривой линеѣ AM (*фиг.* 1), должно представить сію кривую линею многоугольникомъ, состоящимъ изъ безчисленнаго множества боковъ безконечно малыхъ; продолженіе MT какого нибудь бока Mm есть тангенсъ, которой опредѣлится, естьли вычислишь для каждой точки M величину субтангенса PT, или величину части той линеи, на которой ведутъ свой щотъ абсциссы, и которая заключается между ордонатою PM и пересѣченіемъ T тангенса. Вотъ какимъ образомъ опредѣляется сей субтангенсъ.

Вообрази изъ концовъ M и m безконечно малаго бока Mm двѣ ордонаты MP, mp и отъ точки M линею Mr параллельную съ осью AP абсциссъ. Безконечно малый треугольникъ Mrm будетъ подобенъ конечному TPM, и слѣд. получимъ такую пропорцію $rm : rM = PM : PT$. Но естьли представимъ AP чрезъ

x, PM чрезъ y, то явствуетъ изъ выше сказаннаго, что Pp или равная ей rM должна изобразиться чрезъ dx, а rm чрезъ dy; и такъ въ сходственность сего выведемъ $dy : dx = y : PT = \frac{y.dx}{dy}$. Вотъ общая формула для опредѣленія субтангенса всякой кривой линеи, будутъ ли въ ней y и x перпендикулярны между собою или нѣтъ, лишь бы всѣ y были параллельны. Посмотримъ теперь, какъ должно примѣнять эту формулу къ каждой кривой линеи, коей уравненіе извѣстно.

Положимъ, что свойство какой нибудь кривой линеи AM изображено произвольнымъ уравненіемъ, въ которомъ находятся x, y и постоянныя количества. Естьли одифференціалишь это уравненіе, то выдутъ два только рода членовъ, одни умноженные на dx, а другіе на dy. Слѣд. не трудно по сему дифференціальному уравненію опредѣлить обыкновенными Алгебраическими правилами величину $\frac{dx}{dy}$, которая будетъ представлена въ x, y и постоянныхъ. Вставивъ эту величину въ формулѣ $\frac{ydx}{dy}$, или $y \times \frac{dx}{dy}$, получимъ величину субтангенса въ x, y и постоянныхъ; наконецъ вставивъ вмѣсто y величину его, изображенную въ x и выведенную изъ ура-

вненія той же кривой линеи, будемъ имѣть субтангенсъ, изображенной просто въ x и постоянныхъ; такимъ образомъ для опредѣленія субтангенса при всякой точкѣ M, стоитъ только вставить въ семъ послѣднемъ результатѣ вмѣсто x величину абсциссы AP, которая относится къ той точкѣ M.

Положимъ, что кривая линея, принимаемая въ разсужденіе, представляетъ эллипсисъ, котораго уравненіе (*Алг.* 230) есть $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Дифференціалю это уравненіе, и получаю $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$, или $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$; вывожу величину $\frac{dx}{dy}$, раздѣливъ сначала на dy, потомъ на множителя dx, и получаю $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$; вставивъ величину сію въ $\frac{ydx}{dy}$, получу $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; наконецъ положивъ за y^2 величину его $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, данную уравненіемъ кривой линеи, буду имѣть по приведеніи всего $\frac{ydx}{dy}$, или $PT = \frac{2(ax - xx)}{a - 2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$ такую же точно величину, какая найдена была (*Алг.* 237), но которая сыскивается здѣсь гораздо легче и проще. Замѣтимъ теперь мимоходомъ, какимъ образомъ этотъ результатъ подтверждаетъ сказанное (5) о тѣхъ количествахъ, которыя должно отбрасывать въ исчисленіи; ибо употребляя здѣсь дифференціальное исчисленіе, по правиламъ котораго должно сдѣлать въ настоящемъ примѣрѣ опущеніе безконечно малымъ количествамъ втораго порядка въ разсужденіи перваго, мы доходимъ до такого же за-

ключенія, до какого вЂ Алгебрѣ опредѣляя субтангенсЪ прямымЪ и строжайшимЪ образомЪ. Отсюда явствуетЪ, что опуская такимЪ образомЪ количества, мы тѣмЪ самимЪ означаемЪ то, что вЪ силу вопроса должно означить.

ТакимЪ же образомЪ должно поступать при опредѣленіи ТангенсовЪ, Субнормалей, Нормалей и проч.

Положимъ для легкости, что x и y перпендикулярны между собою; и такЪ чтобЪ опредѣлить тангенсЪ, должно опять сравнить треугольникЪ Mmr сЪ треугольникомЪ TPM, и вывести пропорцію $rm : Mm = PM : TM$; но по причинѣ прямоугольнаго треугольника Mrm выходитЪ $Mm = \sqrt{[(rM)^2 + (rm)^2]} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; слѣд. $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y : TM$; слѣд. $TM = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dy^2)}} = y\sqrt{\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$; послѣ чего одифференціаливЪ уравненіе данной кривой линеи, извлекаю изЪ него величину $\frac{dx}{dy}$ и вставливаю квадратЪ ея вЪ этомЪ изображеніи тангенса; наконецЪ вставивЪ вмѣсто y величину его вЪ x и постоянныхЪ, выведенную изЪ уравненія кривой линеи, получаю тангенсЪ, изображенной вЪ x и постоянныхЪ.

Для опредѣленія субнормали, должно провести линею MQ перпендикулярно къ тангенсу TM; потомъ замѣтивъ, что треугольники Mrm, MPQ, въ которыхъ бока взаимно перпендикулярны, подобны между собою; получимъ такую пропорцію $Mr : rm = PM : PQ$; то есть, $dx : dy = y : PQ = \frac{ydy}{dx}$. Слѣд. одифференціаливъ уравненіе кривой линеи, и извлекши изъ него величину $\frac{dy}{dx}$, вставливаю ее въ $\frac{ydy}{dx}$; потомъ кончивъ дѣло-производство, какъ показано было выше, сыщу величину субнормали въ x и постоянныхъ.

На примѣръ одифференціаливъ эллипсическое уравненіе $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, буду имѣть $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$; слѣд. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa}(a-2x)}{2y}$; въ сходственность чего субнормаль $\frac{ydy}{dx} = \frac{bb}{aa} \times \frac{a-2x}{2} = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)$ будетъ таже самая, какую нашли мы (*Алг.* 236).

Естьли пожелаешь опредѣлить нормаль MQ, то сравни опять треугольникъ Mrm съ треугольникомъ MPQ.

Возмемъ вторымъ примѣромъ формулы субтангенсовъ и субнормалей параболическое уравненіе (*Алг.* 291) $yy = px$. Одифференціаливъ его, получимъ

$2ydy = pdx$, слѣд. $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, и $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$. И такъ субтангенсъ $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; а субнормаль $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$; но это въ точности сходствуетъ съ найденными величинами ихъ (*Алг.* 298 и 299).

Возмемъ третьимъ примѣромъ уравненіе $y^{m+n} = a^m x^n$, которое изображаетъ вообще параболы всякаго рода.

Общимъ именемъ *параболы* по согласію всѣхъ называется всякая кривая линея, которой уравненіе $y^{m+n} = a^m x^n$ состоитъ изъ двухъ только членовъ, и въ которомъ показатели y и x въ разныхъ частяхъ имѣютъ одикой знакъ.

Одифференціаливъ это уравненіе, получимъ $(m+n) y^{m+n-1} dy = na^m x^{n-1} dx$; слѣд. $\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n) y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}}$ или, (по вставкѣ за y^{m+n} величины его $a^m x^n$), $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n) a^m x^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n} x$. Отсюда явствуетъ, что субтангенсъ такого рода кривыхъ линей равенъ абсциссѣ x, взятой столько разъ, сколько находится единицъ въ показателѣ количества y, раздѣленномъ на показателя x. Это сходствуетъ съ обыкновенною параболою; ибо въ величинѣ субтангенса ея $2x$, показатель y, раздѣленный на показателя x, есть подлинно $\frac{2}{1} = 2$.

Возмемъ теперь въ примѣръ такую кривую линею, которой свойство изображается уравненіемъ въ дифференціалахъ координатъ. Положимъ, что эта-кую линею представляетъ BM (*фиг.* 2), коей уд-

сциссы AP, Ap взяты въ Ариөметической прогрессіи, а соотвѣтствующія ордонаты PM, pm и проч. въ Геометрической; эта кривая линея называется *Логариөмическою*, потому что ордонаты ея представляютъ всякія удобовообразимыя числа, а абсциссы логариөмы ихъ; такая кривая линея будетъ имѣть, говорю я, уравненіемъ $\frac{amdy}{y} = dx$, потому что это уравненіе, какъ мы видѣли (26), изображаетъ отношеніе чиселъ къ логариөмамъ ихъ. И такъ въ сходственность допущенія сего получимъ $\frac{dx}{dy} = \frac{am}{y}$, и слѣд. субтангенсъ $\frac{ydx}{dy}$ сдѣлается $= \frac{amy}{y} = am$; то есть, субтангенсъ PT для каждой точки логариөмической линеи будетъ всегда одинаковъ и равенъ первой ордонатѣ AB или a, взятой столько разъ, сколько находится единицъ въ модулюсѣ m.

31. Естьли уравненіе кривой линеи будетъ такого свойства, чрезъ которое x будутъ означаться возрастающими, а y по мѣрѣ того умаляющимися, какъ это можно видѣть *въ фигурѣ* 3; то линея rM должна быть въ семъ случаѣ изображена чрезъ $-dy$ (21), и пропорція $rM : rm = PM : PT$, служившая прежде для опредѣленія субтангенса, обращается здѣсь въ $-dy : dx = y : PT = -\frac{ydx}{dy}$. И такъ въ исчисленіи нѣтъ никакой разности съ предыдущимъ случаемъ; одна только перемѣна въ томъ, что тангенсъ упадаетъ здѣсь въ противную сторону начала A абсциссъ, относительно къ ордонатѣ

PM; слѣд. $\frac{ydx}{dy}$ служитъ въ обоихъ случаяхъ одинаково формулою для субтангенсовъ; естьли ордонаты будутъ уменьшаться, то величина $\frac{ydx}{dy}$ изобразится въ отрицательномъ видѣ, и потому должно класть эту величину въ противную сторону начала количествъ *x*.

На примѣръ, естьли за начало абсциссъ въ кругѣ возмешь центръ его, то уравненіе (*Алг.* 221) должно изобразиться чрезъ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, но не трудно замѣтить здѣсь, что *CP* или *x* (*фиг.* 4) будутъ возрастать, а *PM* или *y* по мѣрѣ того уменьшаться; въ сходственность этого субтангенсъ *PT* упадаетъ съ противной стороны *PM* въ разсужденіи начала *C* абсциссъ. Это же самое показываетъ и выкладка; ибо одифференціаливъ данное уравненіе, получимъ $2ydy = -2xdx$, и слѣд. $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$; почему $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{(\frac{1}{4}aa - xx)}{x}$; но эта величина имѣетъ знакъ —, которой показываетъ противное положеніе въ разсужденіи той, какую нашли мы, взявши $\frac{ydx}{dy}$ за формулу субтангенса.

Предложимъ еще примѣромъ уравненіе $xy = aa$, которое принадлежитъ гиперболѣ между ея асимптотами (*Алг.* 282); одифференціаливъ его, получимъ $xdy + ydx = 0$, и $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$; слѣд. $\frac{ydx}{dy} = \frac{-xy}{y} = -x$; это научаетъ насъ, что для проведенія тангенса къ точкѣ *M* гиперболы (*фиг.* 5), разсматриваемой между ея асимптотами, должно взять на ближайшей асимптотѣ къ точкѣ *M* и съ противной стороны *PM* относительно къ *A* началу абсциссъ *x*, линею $PT = AP = x$.

Отсюда явствуетъ, какъ легко опредѣляется все по дифференціальному исчисленію.

На подобіе параболъ всякаго рода называемъ также общимъ именемъ *гиперболъ*, относящихся къ асимптотамъ своимъ, всѣ тѣ кривыя линеи, коихъ уравненіе $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ состоитъ изъ двухъ только членовъ, и гдѣ показатели y и x въ разныхъ частяхъ находятся съ противными знаками. Можно бы еще привести въ примѣръ и сіи кривыя линеи, но мы оставляемъ дѣло - производство самому читателю, которой долженъ найти, что субтангенсъ по данному уравненію кривой линеи такого рода будетъ $-\frac{m}{n}x$; то есть, что этотъ субтангенсъ будетъ упадать съ противной стороны начала x и будетъ равенъ абсциссѣ столько разъ взятой, сколько находится единицъ въ показателѣ y, раздѣленномъ на показателя x.

32. Замѣтимъ здѣсь еще, что $\frac{dx}{dy}$ изображаетъ тангенсъ такого угла, которой кривая линея составляетъ въ каждой точкѣ съ ордонатою; а $\frac{dy}{dx}$ представляетъ тангенсъ угла, которой таже кривая линея составляетъ съ осью абсциссъ. Ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ *Mmr* (*фиг.* 1) получимъ (по предположеніи радіуса $= 1$) такую пропорцію $rm : rM = 1 :$ *танг.* rmM; слѣд. *танг.* $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. И такъ желая узнать, въ какой точкѣ кривая линея или тангенсъ ея составляетъ данной уголъ, или такой уголъ,

котораго тангенсъ извѣстенъ, въ сходственность сказаннаго представляю этотъ тангенсъ чрезъ m, и вывожу $m = \frac{dx}{dy}$; потомъ одифференціаливъ уравненіе кривой линеи, опредѣлю величину $\frac{dx}{dy}$, и приравняю ее къ m; вставивъ въ послѣднемъ семъ уравненіи вмѣсто y величину его въ x и постоянныхъ, выведенную изъ уравненія кривой линеи, буду имѣть величину или величины x, принадлежащія тѣмъ точкамъ, гдѣ кривая линея будетъ производить съ ордонатою данной уголъ; естьлижъ кривая линея не можетъ сдѣлать съ ордонатою равнаго угла данному, то найдется, что величина или величины x будутъ мнимыя, или само уравненіе покажетъ несообразность.

На примѣръ въ гиперболѣ, которой уравненіе таково $yy = 2(ax + xx)$, найду $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a+4x}$; приравнявъ величину эту къ m, получу $\frac{2y}{2a+4x} = m$, или $\frac{y}{a+2x} = m$; откуда вывожу $y = ma + 2mx$; но какъ по уравненію кривой линеи выходитъ $y = \sqrt{[2(ax+xx)]}$, то буду имѣть $ma + 2mx = \sqrt{[2(ax + xx)]}$, или по составленіи квадратовъ $mmaa + 4mmax + 4mmxx = 2ax + 2xx$. Теперь естьли потребуется опредѣлить, въ какомъ мѣстѣ эта гипербола составляетъ съ ордонатою уголъ 45 градусовъ, то знавши, что тангенсъ 45 градусовъ равенъ радіусу, получаю $m = 1$; а это превращаетъ уравненіе въ $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$, или $2xx + 2ax + aa = 0$; по рѣшеніи

сего урагненія выходитъ $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}aa)}$; обѣ умственныя величины сіи показываютъ, что гипербола, имѣющая особенное уравненїе $yy = 2(ax + xx)$ не можетъ нигдѣ сдѣлать съ ордонатою угла 45 градусовъ.

Примѣненіе къ предѣламъ кривыхъ линей и вообще къ предѣламъ количествъ; и о рѣшеніи вопросовъ, предлагаемыхъ о изслѣдованіи самыхъ большихъ и самыхъ меньшихъ величинъ (de maximis et minimis).

33. Мы видѣли (32), что $\frac{dx}{dy}$ изображаетъ тангенсъ угла, которой кривая линея или тангенсъ ея составляетъ въ каждой точкѣ съ ордонатою, а $\frac{dy}{dx}$ представляетъ тангенсъ угла, которой та же кривая составляетъ съ осью абсциссъ.

И такъ, чтобъ узнать въ какомъ мѣстѣ тангенсъ кривой линеи становится параллельнымъ съ ордонатами, должно сыскать въ какомъ мѣстѣ величина $\frac{dx}{dy}$ превращается въ нуль, или все равно, въ какомъ мѣстѣ dx превращается въ нуль; а чтобъ узнать гдѣ тангенсъ кривой линеи бываетъ параллеленъ съ абсциссами, должно сыскать въ какомъ мѣстѣ $\frac{dy}{dx}$ не имѣетъ никакой величины, или въ какомъ мѣстѣ dy равно нулю. Ибо явствуетъ, что въ первомъ случаѣ уголъ кри-

вой линеи съ ординатами, а во второмъ съ абсциссами не имѣетъ никакой величины.

И такъ желая узнать, имѣетъ ли кривая линея, коей уравненіе дано, тангенсъ параллельнымъ съ ординатами или абсциссами, должно одифференціалить данное уравненіе и извлечь изъ него величину $\frac{dx}{dy}$; потомъ приравнявъ числителя величины $\frac{dx}{dy}$ къ нулю, получимъ уравненіе, по которому вмѣстѣ съ уравненіемъ кривой линеи, найдемъ величину x и величину y, показывающія въ какомъ мѣстѣ тангенсъ параллеленъ съ ординатами; ежели это можетъ случиться въ разныхъ мѣстахъ то получимъ многія величины для x и для y.

Естьли напротивъ приравняемъ знаменателя къ нулю, то по этому уравненію вмѣстѣ съ уравненіемъ кривой линеи опредѣлимъ величины x и y, которыя будутъ отвѣчать тѣмъ точкамъ, гдѣ тангенсъ кривой линеи становится параллельнымъ съ абсциссами.

Для объясненія этой истинны примѣромъ, возмемъ кривую линею, изображенную такимъ уравненіемъ $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, которое по предположеніи x и y перпендикулярными между собою, относится къ кругу; здѣсь за начало x и y принимается точка A внѣ круга.

Линеи AP (*фиг.* 6) представляютъ x, а линеи PM, PM' представляютъ двѣ величины y, которыя по рѣшенiи даннаго уравненiя служатъ для каждой величины x.

Одифференцiаливъ это уравненiе, получаю $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdy$, отсюда вывожу $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$.

Естьли для опредѣленiя тѣхъ точекъ, гдѣ тангенсъ становится параллеленъ съ ордонатами, приравняю числителя къ нулю, то выведу $2y - 2b = 0$, или $y = b$. Вставивъ величину y въ уравненiи кривой линеи, нахожу $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$, или $xx - 3ax = -2aa$; по рѣшенiи этого уравненiя выходитъ $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$, то есть, $x = 2a$, и $x = a$. Но это показываетъ, что кривая линея, или тангенсъ ея бываетъ параллеленъ съ ордонатами въ двухъ точкахъ R и R', изъ которыхъ каждая имѣетъ ордонатою линею b, и при томъ R имѣетъ абсциссою линею $AQ = a$, а R' линею $AQ' = 2a$.

Естьли теперь пожелаемъ узнать, въ какомъ мѣстѣ тангенсъ кривой линеи становится параллеленъ съ абсциссами, то приравнявъ знаменателя къ нулю, будемъ имѣть $3a - 2x = 0$, или $x = \frac{3}{2}a$. Вставивъ эту величину въ уравненiи кривой линеи, получимъ $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$, или $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; по извлеченiи квадратнаго корня $y - b = \pm \frac{1}{2}a$; слѣд. $y = b \pm \frac{1}{2}a$; то есть, $y = b + \frac{1}{2}a$, и $y = b - \frac{1}{2}a$. Это показываетъ, что тангенсъ бываетъ параллеленъ съ абсциссами въ двухъ точкахъ T и T', которымъ служитъ общею абсциссою линея $AS = \frac{3}{2}a$, и изъ которыхъ одна T' имѣетъ ордонатою $ST' = b + \frac{1}{2}a$, а другая T линею $ST = b - \frac{1}{2}a$.

Точки Q и Q' изображаютъ то, что мы называемъ *предѣлами* абсциссъ, потому что между Q и Q' каждой абсциссѣ AP отвѣчаютъ настоящiя величины PM, PM' для y; но между Q и A и далѣе за Q' по

другую сторону A не находится никакой точки кривой линеи; такъ что положивъ x меньше AQ или a, или больше AQ' или $2a$, не можно найти дѣйствительной величины для y; ибо вставивъ въ уравненіи вмѣсто x количество $a - q$ меньше a, или $2a + q$ больше $2a$, будемъ имѣть по разрѣшеніи уравненія двѣ умственныя величины y.

Естьли изъ точки A проведешь AL параллельно съ ордонатами, то есть, ось ордонатъ, а изъ точекъ T и T' линеи TL, $T'L'$ параллельно съ абсциссами; то линеи $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, и $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$ называются *предѣлами* ордонатъ, потому что ордоната не можетъ быть здѣсь ни больше AL' ни меньше AL по предположеніи тангенса параллельнымъ съ абсциссами. И такъ, принявъ въ уравненіи кривой линеи за y количество меньше $b - \frac{1}{2}a$, на примѣръ такое, какъ $b - \frac{1}{2}a - q$, найдемъ по окончаніи рѣшенія величины x умственными. Тоже самое произойдетъ, когда вмѣсто y возмешь количество $b + \frac{1}{2}a + q$ больше $b + \frac{1}{2}a$.

34. Ордоната ST' больше всѣхъ другихъ, проведенныхъ къ выпуклой части $RT'R'$ окружности. Ордоната ST меньше всѣхъ, проведенныхъ къ вогнутой части; а ордонаты QR и $Q'R'$ представляютъ вдругъ самыя меньшія къ выпуклой, и самыя большія къ вогнутой.

35. И такъ одинъ и тотъ же способъ служитъ 1. къ означенію предѣловъ абсциссъ и ордонатъ; 2. къ опредѣленію того, въ какихъ случаяхъ тангенсъ становится параллельнымъ съ абсциссами или ордонатами; 3. наконецъ къ опредѣленію самыхъ большихъ и самыхъ меньшихъ абсциссъ или ордонатъ.

36. Какбы количество ни было выражено Алгебраически, но всегда можно почитать выраженіе его такимъ, которое представляетъ ординату какой нибудь кривой линеи. На примѣръ, естьли $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$ будетъ означать количество, которое назову y, то $y = \frac{x^2 (a-x)}{aa}$; и слѣд. могу почитать это уравненіе, относящимся къ какой нибудь кривой линеи, въ которой x будетъ представлять абсциссу, а y ординату. Тогда, естьли количество $\frac{x^2 (a-x)}{aa}$ можетъ сдѣлаться въ нѣкоторыхъ случаяхъ самымъ большимъ или самымъ меньшимъ, то есть, естьли оно способно представить изъ себя то, что называется *maximum* или *minimum*, должно для познанія сего поступать по предыдущему способу; именно, одифференціалить уравненіе $y = \frac{x^2 (a-x)}{aa}$, и извлекши изъ него величину $\frac{dx}{dy}$, приравнять къ нулю числителя или знаменателя этой величины.

37. Въ этомъ-то состоитъ способъ рѣшенія такъ называемыхъ вопросовъ *de maximis* и *minimis*, одинъ изъ полезнѣйшихъ въ Аналитикѣ, и имѣющій предметомъ находить между многими количествами, возрастающими

или умаляющимися по одинакому закону, то; которое имѣетъ нѣкоторыя извѣстныя свойства въ высочайшей степени предъ всѣми подобными ему. Мы намѣрены показать это въ примѣрахъ.

38. Предложимъ сначала раздѣлить извѣстное число a на двѣ такія части, коихъ бы произведеніе было самое большое въ разсужденіи всякаго другаго раздѣленія. Естьли чрезъ x представимъ одну изъ частей, то другая будетъ $a - x$; а произведеніе $ax - xx$; положимъ теперь, что это произведеніе $= y$; слѣд. $y = ax - xx$; одифференціаливъ это уравненіе, получимъ $dy = adx - 2xdx$, и $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a-2x}$. Естьли приравняемъ числителя къ нулю, то найдемъ $1 = 0$, но это показываетъ не сообразность; слѣд. естьли находится *maximum* въ этомъ количествѣ, то должно его искать въ знаменателѣ уравненія; и такъ приравнявъ знаменателя къ нулю, получимъ $a - 2x = 0$, откуда выходитъ $x = \frac{1}{2}a$. Это научаетъ, что какимъ бы образомъ ни раздѣлили мы число на двѣ части; самое большое возможное произведеніе получимъ тогда, когда каждая изъ частей будетъ равна половинѣ даннаго числа.

39. Естьли Алгебраическое изображеніе количества будетъ такого рода, какое дано въ предыдущемъ примѣрѣ, то можно не приравнивать его къ новому перемѣнному; но одифференціаливъ просто, приравнять числителя или знаменателя его къ нулю, когда сей дифференціалъ будетъ состоять изъ дроби. И такъ въ томъ же примѣрѣ одифференціаливъ

просто $ax - xx$, и приравнявъ къ нулю дифференціалъ $adx - 2xdx$, получу $adx - 2xdx = o$, и найду какъ выше $x = \frac{1}{2}a$.

40. Предложимъ теперь такой вопросъ, которой бы всеобщѣе былъ предыдущаго; на примѣръ раздѣлить извѣстное число a на двѣ части такъ, чтобъ произведенїе опредѣленной степени одной части на такую же или другую степень второй, вышло самое возможное болѣшое. Представимъ чрезъ x первую часть, и чрезъ m степень ея; вторая часть будетъ $a - x$, а за степень ея положимъ n; послѣ чего требуемое произведенїе должно состоять изъ $x^m (a - x)^n$. Одифференціаливъ сїе произведенїе и приравнявъ его къ нулю, получимъ $mx^{m-1} dx (a - x)^n - nx^m . (a-x)^{n-1} dx = o$; раздѣливъ его на $x^{m-1} dx (a - x)^{n-1}$, будемъ имѣть $m (a - x) - nx = o$, или $ma - mx - nx = o$; но изъ этого выходитъ $x = \frac{ma}{m+n}$. Положимъ, что вопросомъ требуется раздѣлить число a на двѣ части такъ, чтобъ квадратъ первой, умноженной на кубъ второй, представилъ самое большое произведеніе. И такъ $m = 2$, $n = 3$; слѣд. $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; то есть, одна изъ частей должна быть $\frac{2}{5}$, а другая $\frac{3}{5}$ даннаго числа или количества.

То, что сказали мы выше, относительно къ *фигурѣ* 6, показываетъ, что количество можетъ сдѣлаться самымъ большимъ изъ всѣхъ себѣ подобныхъ двоякимъ образомъ; именно какъ PM' возрастая до умаленія своего, или

какъ $P'M''$ возрастая до точки R', гдѣ вдругъ останавливается и превращается въ QR, то есть, въ самую большую ордонату изъ всѣхъ проведенныхъ къ вогнутой части, и въ самую меньшую изъ всѣхъ проведенныхъ къ выпуклой части. Равнымъ образомъ количество можетъ сдѣлаться самымъ меньшимъ двояко, именно какъ PM уменьшаясь до точки, съ которой начинаетъ увеличиваться, или какъ $P'''M'''$ уменьшаясь до тѣхъ поръ, пока должна остановиться, и тогда оно представляетъ вмѣстѣ *minimum* и *maximum*; оно будетъ *minimum* въ разсужденіи отрасли $M'T'M'''$, а *maximum* въ разсужденіи отрасли MTM''.

41. И такъ желая узнать о количествѣ, которое способно сдѣлаться *maximum* или *minimum*, или и тѣмъ и другимъ въ мѣстѣ, въ какомъ оно изъ сихъ трехъ состояній находится, должно предположить, что a означаетъ величину x, приличную *maximum* или *minimum*, и вставить въ данномъ количествѣ за x попеременно $a+q$, a и $a-q$. Естьли два крайніе результата будутъ настоящія величины и меньше средняго, то количество будетъ относиться къ *maximum*; естьли оба крайніе результата будутъ больше среднягѣ, то оно представитъ *minimum*; наконецъ естьли изъ двухъ крайнихъ результатовъ

одинъ будетъ мнимой, а другой настоящій, то количество изобразитъ вдругъ *maximum* и *minimum*.

42. Естьли при опредѣленіи *maximum* или *minimum*, найденная величина для перемѣннаго показываетъ величину самаго большаго или самаго меньшаго отрицательною, то должно заключить, что изображаемое ею *maximum* или *minimum* принадлежитъ не данному вопросу, но такому, въ коемъ нѣкоторыя условія противны.

На примѣръ естьли дано будетъ: *раздѣлить линею AB (фиг. 7) въ точкѣ C такъ, чтобъ квадратъ разстоянія AC отъ точки A, раздѣленный на разстояніе BC отъ точки B, сдѣлалъ самое возможно-меньшое частное*; то представь данную линею AB чрезъ a, часть AC чрезъ x, слѣд. остальная часть CB будетъ $a-x$, а частное $\frac{x^2}{a-x}$. Одифференціаливъ это количество или $x^2(a-x)^{-1}$, получишь $2xdx.(a-x)^{-1} + x^2dx\,(a-x)^{-2} = o$, или $\frac{2xdx}{a-x} + \frac{x^2dx}{(a-x)^2} = o$, или $2axdx - x^2dx = o$, или $(2a-x)x = o$; отсюда выходитъ $x = o$, или $2a - x = o$. Первая величина показываетъ *minimum* безъ выкладки; что касается до второй, изъ которой выводимъ $x = 2a$, то вставивъ ее въ $\frac{x^2}{a-x}$, получимъ $\frac{4a^2}{-a}$ или $-4a$. Судя по этому изображенію должно заключить, что minimum не принадлежитъ настоящему вопросу; но такому, которымъ требуется найти точку C

не между A и B, а на продолженіи AB къ сторонѣ B. Ибо представивъ въ последнемъ случаѣ AC' чрезъ x, получишь за разстояніе BC' не $a-x$, но $x-a$, а за искомое количество $\frac{x^2}{x-a}$; естьли одифференціаливъ $\frac{x^2}{x-a}$, приравняешь его къ нулю, то выдетъ $\frac{2xdx}{x-a}-\frac{x^2dx}{(x-a)^2}=0$, или по приведеніи $x^2dx-2axdx=0$; откуда заключаю такъ, какъ и прежде $x=2a$; вставливаю величину сію въ $\frac{x^2}{x-a}$, отъ чего это количество превращается въ $4a$. Слѣд. для последняго случая находится *minimum*.

Естьли приравняешь къ нулю знаменателя $x-a$ дифференціала, то выдетъ $x=a$ такая величина, которая означаетъ maximum; ибо количество въ такомъ случаѣ становится безконечнымъ.

43. Естьли въ выраженіи количества, которое должно представлять *maximum* или *minimum*, заключается постоянной множитель или дѣлитель, то можно прежде, чѣмъ начнешь дифференціалить это количество, уничтожить ихъ. На примѣръ положимъ, что $\frac{ay}{b}$ представляетъ вообще количество способное сдѣлаться *maximum* или *minimum*, и въ которомъ a и b суть постоянныя, въ сходственность чего $\frac{ady}{b}=0$; а какъ a и b не могутъ равняться нулю, то должно, чтобъ $dy=0$; почему заключеніе выходитъ такое

же, какъ бы y одно должно быть *maximum* или *minimum*, то есть, такое же, какое выходитъ по уничтожении постоянныхъ факторовъ и дѣлителей. Это замѣчаніе облегчаетъ выкладку во многихъ случаяхъ.

44. Предложимъ теперь *найти между всѣми линеями, какія только можно провести въ данномъ углѣ ABC* (фиг. 8) *чрезъ точку D такую, которая бы составила съ боками этого угла самомалѣйшій треугольникъ?*

Провели чрезъ точку D линею DG параллельно съ бокомъ AB, и допустивъ какую нибудь прямую линею EF, продолженную чрезъ точку D, опусти перпендикуляръ DK на BC, а изъ точки E, гдѣ линея EF пересѣкаетъ AB, опусти также перпендикуляръ EL на BC. Линея BG и перпендикуляръ DK предполагаются извѣстными; представимъ BG чрезъ a, DK чрезъ b, а основаніе треугольника BEF чрезъ x. Не трудно примѣтить, что съ нѣкоторой точки по мѣрѣ какъ линея BF увеличивается, самъ треугольникъ увеличивается, и на оборотъ естьли BF начнетъ уменьшаться, то и треугольникъ уменьшается, однако до нѣкотораго только мѣста; ибо естьли BF сдѣлается почти равною BG, то прямая линея EDF будетъ почти параллельною съ AB и слѣд. треугольникъ становится въ такомъ случаѣ безпредѣльнымъ. И такъ должна быть такая величина BF, которая представитъ самомалѣйшій треугольникъ. Для опредѣленія оной сыщемъ общее изображеніе треугольника BEF. Въ подобныхъ треугольникахъ BEF, GDF получимъ $GF : BF = DF : EF$, а въ другихъ подобныхъ же DKF, ELF получимъ $DF : EF = DK : EL$; слѣд $GF : BF = DK : EL$, то есть, $x - a : x = b : EL = \frac{bx}{x-a}$; слѣд. площадь треугольника BEF, состоящая изъ $\frac{EL \times BF}{2}$, будетъ равна $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$, или $\frac{\frac{1}{2}bxx}{x-a}$. Те-

перь слѣдуетъ одифференціалить это количество; и приравнять числителя или знаменателя его къ нулю, или поелику можно (43) уничтожить постояннаго фактора $\frac{1}{2}b$, то должно одифференціалить просто $\frac{xx}{x-a}$; но чтобъ не дѣлать снова той же выкладки, которая показана (42), заключимъ равномѣрно, что $x = 2a$; и такъ естьли возмешь $BF = 2a = 2BG$, то линея FDE, проведенная чрезъ точку D, сдѣлаетъ съ боками даннаго угла желаемой треугольникъ.

45. *Сыскать между всѣми параллелипипедами одинакой поверхности и одинакой высоты такой, которой бы всѣхъ былъ вмѣстительнѣе, то есть, имѣлъ бы самую большую толщину?*

Представимъ высоту чрезъ h, а поверхность параллелипипеда чрезъ cc, напослѣдокъ чрезъ x и y два бока прямоугольника, служащаго основаніемъ. Вся поверхность сего параллелипипеда должна состоять изъ шести прямоугольниковъ, изъ коихъ два будутъ имѣть высотою h, а основаніемъ x, два другіе высотою также h, а основаніемъ y, наконецъ два послѣднія x основаніемъ, а y высотою; и такъ вся эта поверхность должна изобразиться чрезъ $2hx + 2hy + 2xy$; то есть, $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Что принадлежитъ до вмѣстительности или толщины, то ее изобразитъ величина hxy. А какъ толщина сія должна быть самая большая между всѣми параллелипипедами одинакой поверхности, то слѣдуетъ дифференціалу ея $hxdy + hydx = 0$, или (43) $xdy + ydx = 0$. Но изъ уравненія $2hx + 2hy + 2xy = cc$, изображающаго постоянную или одинакую поверхность всѣхъ параллелипипедовъ, выходитъ $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$. Вставивъ въ этомъ уравненіи величину dx, выведенную изъ перваго, получимъ по приведеніи всего $y = x$. Слѣд. основаніе должно состоять изъ квадрата; а чтобъ узнать бокъ сего квадрата, то должно поставить вмѣсто y величину его x въ уравненіи $2hx + 2hy + 2xy = cc$, ко-

торое и превратится въ $4hx + 2x^2 = cc$. Рѣшивъ это уравненіе, получимъ $x = -h \pm \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$; а какъ отрицательной корень $x = -h - \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$ не можетъ служить для настоящаго вопроса, то приличною величиною x будетъ $x = -h + \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$.

46. Естьли теперь потребуется узнать, *какой долженъ быть высоты h параллелипипедъ, имѣющій самую большую толщину изъ всѣхъ одинакаго основанія*, то замѣтивъ, что при высотѣ h, основаніе его должно состоять изъ квадрата, можемъ изобразить толщину сію чрезъ hxx; почему одифференціаливъ hxx, принимая h и x за перемѣнныя, и приравнявъ дифференціалъ его къ нулю, получимъ $2hxdx + xxdh = 0$, или $2hdx + xdh = 0$, по раздѣленіи на x. Но изъ уравненія $4hx + 2x^2 = cc$, изображающаго постоянную поверхность, выходитъ слѣдующій дифференціалъ $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; вставивъ здѣсь вмѣсто dh величину его, выведенную изъ уравненія $2hdx + xdh = 0$, будемъ имѣть по приведеніи всего $h = x$. И такъ искомый параллелипипедъ долженъ быть кубъ, потому что высота его h равняется боку x квадрата, служащаго основаніемъ. А чтобъ найти величину бока этого куба, должно вставить въ уравненіи $4hx + 2x^2 = cc$ вмѣсто h величину его x. отъ чего оно превратится въ $4x^2 + 2x^2 = cc$, или въ $6x^2 = cc$; отсюда выходитъ $x = \sqrt{\left(\frac{cc}{6}\right)}$. И такъ изъ всѣхъ параллелипипедовъ одинакой поверхности вмѣстительнѣе есть кубъ, имѣющій бокомъ линею, равную квадратному корню изъ шестой части поверхности его.

47. Такимъ же образомъ должно рѣшить слѣдующій другой вопросъ: *найти между всѣми прямыми цилиндрами одинакой поверхности самой вмѣстительной?*

Представивъ чрезъ x діаметръ основанія, чрезъ y высоту, и чрезъ $1 : c$ содержаніе діаметра къ окружности, получимъ $cx \times y$ за наружную поверхность,

$cxy + \frac{cx^2}{2}$ за всю поверхность, а $\frac{cx^2y}{4}$ за толщину цилиндра. Поелику послѣдняя сїя величина должна быть *maximum*, то надлежитъ дифференцїалу ея равняться нулю; слѣд. $\frac{cxydx}{2} + \frac{cx^2dy}{4}$, или $2ydx + xdy = 0$. А какъ поверхность должна быть постоянное количество, то дифференцїалъ ея $cxdy + cydx + cxdx = 0$, или $xdy + ydx + xdx = 0$.

Изъ уравнеїня $2ydx + xdy = 0$ получаю $dy = -\frac{2ydx}{x}$. Вставливаю сїю величину въ послѣднемъ уравненїи и нахожу $-2ydx + ydx + xdx = 0$, изъ котораго выходитъ $y = x$. И такъ прямой цилиндръ, коего высота равна поперешнику основанїя, будетъ вмѣстительнѣе всѣхъ другихъ одинакой съ нимъ поверхности. И на оборотъ изъ всѣхъ прямыхъ цилиндровъ равной толщины самую малую поверхность будетъ имѣть тотъ, котораго дїаметръ основанїя равенъ высотѣ.

48. *Сыскать между треугольниками одинакаго окруженїя и одинакаго основанїя такой, котораго бы площадь была всѣхъ больше?*

Пусть a будетъ означать основанїе AB, а c окруженїе треугольника ABC (*фиг.* 9). Опустивъ перпендикуляръ CP и представивъ AP чрезъ x, CP чрезъ y, получимъ $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx+yy)}$, а $CB = \sqrt{[(a-x)^2 + yy]}$. Слѣд. окруженїе треугольника изобразится чрезъ $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a-x)^2 + yy]} + a$, а площадь его чрезъ $\frac{ay}{2}$; но по положенїю $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a - x)^2 + y^2]} + a = c$, и при томъ дифференцїалъ $\frac{ay}{2}$ долженъ $= 0$, то есть,

$\frac{ady}{2}$, или $dy = o$. Одифференціаливъ уравненіе, изображающее постоянную площадь треугольника, получимъ $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{(a - x) . - dx + ydy}{\sqrt{[(a - x)^2 + yy]}} = o$; количество сіе по причинѣ $dy = o$ превращается въ $\frac{xdx}{\sqrt{(xx + yy)}} - \frac{(a - x)\, dx}{\sqrt{[(a-x)^2 + y^2]}} = o$, или по раздѣленіи на dx и по уничтоженіи дробей въ $x\sqrt{[(a-x)^2 + yy]} = (a - x) . \sqrt{(xx + yy)}$. Составляю квадратъ и получаю $xx\,(a - x)^2 + xxyy = (a - x)^2 . xx + (a - x)^2 . yy$; уничтожаю въ обѣихъ частяхъ о инакіе члены, и раздѣливъ потомъ на yy, нахожу $xx = (a - x)^2$, или $xx = aa - 2ax + xx$; слѣд. $x = \frac{1}{2}a$ показываетъ, что треугольникъ долженъ быть равнобедренной. И такъ естьли поставишь изъ середины AB перпендикуляръ, и изъ точки B, какъ изъ центра радіусомъ равнымъ половинѣ остатка, выходящаго изъ окруженія c безъ основанія a, засѣчешь перпендикуляръ въ точкѣ C, потомъ естьли проведешь CB и CA, то получишь такой треугольникъ, котораго площадь будетъ больше всѣхъ другихъ равнаго съ нимъ окруженія и равнаго основанія.

49. Естьлижъ теперь спроситъ кто, *какой вообще треугольникъ имѣетъ самую большую площадь предъ всѣми другими равнаго съ нимъ основанія?* то должно замѣтить, что каково бы основаніе ни было, x по предыдущему рѣшенію долженъ всегда равняться половинѣ того основанія; то есть, каково бы a ни было, x долженъ всегда $= \frac{1}{2}a$. По допущеніи сего уравненіе, изображающее окруженіе, превратится въ настоящемъ случаѣ въ $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + a = c$, или въ $2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} = c - a$; по составленіи квадрата произойдетъ $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$, и слѣд. $y = \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$. И такъ площадь треугольника, изображенная вообще чрезъ $\frac{ay}{2}$

будетЪ состоять теперь изЪ $\frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$, а какЪ она должна быть самая большая изЪ всѣхЪ равнаго окруженія не смотря на основаніе a, то должно приравнять кЪ нулю дифференціалЪ $\frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$, или $a \sqrt{(cc - 2ac)}$, принявЪ a за перемѣнное; слѣд. получимЪ $d[a \sqrt{(cc - 2ac)}]$, или $d[a(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}]$, то есть, $da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} - a \cdot cda\,(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} = 0$, или $da\,(cc - 2ac) - cada = 0$, или $ccda - 3cada = 0$; отсюда выходитЪ $a = \frac{c}{3}$. И такЪ основаніе должно равняться трети окруженія; а какЪ мы видѣли, что треугольникЪ долженЪ быть равнобедреннымЪ, то вЪ настоящемЪ случаѣ слѣдуетЪ ему быть равностороннымЪ. Слѣд. изЪ всѣхЪ треугольниковЪ равнаго окруженія самую большую площадь имѣетЪ равносторонной.

50. ВЪ послѣднихЪ двухЪ рѣшеніяхЪ мы не приравнивали знаменателя кЪ нулю для того, что вЪ первомЪ нашли бы для x умственную величину, а во второмЪ $a = \frac{1}{2} c$ такую, которая бы негодилась для вопроса; ибо естьли основаніе будетЪ состоять изЪ половины окруженія, то два прочіе бока должны упасть на то же основаніе и соединиться сЪ нимЪ; слѣд. треугольникЪ сдѣлается вЪ такомЪ случаѣ равенЪ нулю. Естьли приравнивая впередЪ числителя или знаменателя кЪ нулю, не получимЪ приличнаго рѣшенія, то мы не станемЪ

о томъ упоминать, дабы не останавливаться на безполезныхъ изслѣдованiяхъ.

51. Въ предпослѣднемъ вопросѣ, мы не прежде опредѣлили такой параллелипипедъ, которой бы предъ всѣми другими одинакой съ нимъ поверьхности былъ вмѣстительнѣе, какъ по разсмотрѣнiи параллелипипедовъ одинакой высоты. Равномѣрно въ послѣднемъ вопросѣ, которымъ требовалось найти треугольникъ самой большой площади изъ всѣхъ имѣющихъ равное съ нимъ окруженiе, мы начали сперва рѣшить такой, которой относился къ треугольникамъ равнаго окруженiя и равнаго основанiя.

Мы совѣтуемъ поступать такъ всегда; то есть, начинать сперва рѣшить вопросъ съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ количествъ, потомъ принимать за перемѣнныя каждое изъ прочихъ, служившихъ постоянными.

На примѣръ въ данномъ вопросѣ: *раздѣлить данное число на три части такъ, чтобъ произведенiе ихъ было самое большое*; назвавъ двѣ изъ частей x и y, а данное число a, получу за третью часть $a - x - y$, а за произведенiе ихъ $xy(a - x - y)$, котораго дифференцiалъ должно приравнять къ нулю. Но я вмѣсто того, чтобъ дифференцiалить это количество, принимая x и y за перемѣнныя въ одно время, могу сначала взять перемѣннымъ одно только x, и въ такомъ случаѣ получу $aydx - 2xydx - y^2dx = o$; отсюда вывожу $x = \frac{1}{2}(a - y)$. Произведенiе $xy(a - x - y)$ перемѣняется послѣ сего въ $\frac{1}{4}y(a - y)^2$. Дифференцiалю теперь принимая y за перемѣнное, и

получаю $\frac{3}{4} dy (a - y)^2 - \frac{2}{4} ydy (a - y)$; этотъ дифференціалъ приравниваю также къ нулю, и нахожу $dy (a - y)^2 - 2ydy (a - y) = o$, отсюда вывожу $y = \frac{1}{3}a$; слѣд. заключаю, что x и третья часть $a - x - y$ должны состоять въ особенности изъ $\frac{1}{3}a$.

52. Можно также, естьли кому угодно, допускать вдругъ всѣ перемѣнныя количества; потомъ совокупивъ всѣ члены, умноженные на дифференціалъ одного и того же перемѣннаго, приравнять сумму ихъ къ нулю и сдѣлать тоже съ дифференціалами другихъ перемѣнныхъ.

Такимъ образомъ въ предыдущемъ примѣрѣ могу вывести вдругъ $aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = o$; приравнявъ къ нулю въ особенности сумму членовъ съ dx и съ dy, получу $aydx - 2xydx - y^2dx = o$, и $axdy - x^2dy - 2xydy = o$, или по раздѣленіи перваго уравненія на ydx, а втораго на xdy, $a - 2x - y = o$, и $a - x - 2y = o$; по этимъ уравненіямъ не трудно заключить, что $x = \frac{1}{3}a$, и $y = \frac{1}{3}a$ какъ выше.

Причину этого дѣло-производства не трудно замѣтить, когда разсмотримъ, что мы приравнивая цѣлой дифференціалъ къ нулю, тожъ самое условіе стараемся выполнить, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Но это условіе не можно иначе выполнить, какъ двоякимъ образомъ, или предположивъ каждой изъ дифференціаловъ dx и dy равнымъ нулю, что хотя въ самомъ дѣлѣ не будетъ противно, но не сдѣлаетъ ничего извѣстнымъ, или предположивъ сумму членовъ умножающихъ dx и dy равною въ особенности нулю; но это сходствуетъ въ точности съ предписаннымъ теперь правиломъ.

53. Естьли условія вопроса будутъ изображены многими уравненіями, то должно, прежде чѣмъ употребить предписанное теперь

правило въ томъ дифференціальномъ уравненія, по которому должно опредѣлить *maximum* или *minimum*, извлечь изъ прочихъ дифференціальныхъ уравненій величины дифференціаловъ стольких перемѣнныхъ, сколько находится уравненій безъ упомянутаго, и вставить ихъ въ это послѣднее; потомъ поступай такъ, какъ бы кромѣ этого уравненія не было другихъ.

На примѣръ при изысканіи самаго большаго параллелипипеда, мы сверхъ уравненія $2hx + hy + 2xy = cc$, имѣли еще такое условіе, по которому количество hxy должно представлять *maximum.* И такъ принявъ вдругъ h, x и y за перемѣнныя, получимъ изъ уравненія $2hx +$ и проч. дифференціалъ $2hdx + 2xdh + 2hdy + 2ydh + 2xdy + 2ydx = 0$, а изъ означеннаго условія $hxdy + hydx + xydh = 0$. Изъ перваго уравненія вывожу величину $dh = \frac{-ydx - xdy - hdy - hdx}{x + y}$; и вставивъ ее во второмъ получаю по обыкновенномъ приведеніи членовъ $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$. Теперь приравнявъ къ нулю сумму членовъ, умножающихъ dx, и сумму членовъ, умножающихъ dy, найду $hy^2 - xy^2 = 0$, или $h = x$, и $hx^2 - x^2y = 0$, или $h = y$, по раздѣленіи на общаго фактора x^2; слѣд. три протяженія должны быть равны между собою, что въ точности сходствуетъ съ первымъ рѣшеніемъ; притомъ же естьли вставлю величины сіи въ уравненіе $2hx + 2hy + 2xy = cc$, то выведу такъ, какъ прежде $6h^2 = cc$, или по разрѣшеніи $h = \sqrt{\left(\frac{cc}{6}\right)}$.

54. Можно не только дифференціалить вдругъ или въ особенности перемѣнныя количества, но можно еще допускать постоянными тѣ части изъ нихъ, какія заблагораз-

судится, лишь бы число произвольныхъ допущеній вмѣстѣ съ условіями вопроса, не превосходило числа перемѣнныхъ x, y, z. Это замѣчаніе весьма полезно во многихъ вопросахъ, и особенно въ тѣхъ, которые заключаютъ въ себѣ радикальныя количества.

О Радіусахъ кривизны, или о Развертке (la Developpée).

55. Естьли вообразимъ къ каждой точкѣ M, m, m' и проч. какой нибудь кривой линеи (*фиг.* 10) перпендикуляры MN, mn, $m'n'$ и проч., то послѣдовательныя ихъ сѣченія N, n, n' и проч. произведутъ кривую линею, называемую *развертка*; ибо естьли допустивъ сію кривую линею закрытою снуркомъ ABN, простирающимся отъ начала ея B, захотимъ послѣ раскрыть ее, то конецъ A снурка долженъ описать въ такомъ случаѣ кривую линею AM. Равномѣрно при раскрытіи Nn, какъ самомалѣйшей прямой линеи снурокъ MNn начертитъ около точки n какъ центра дугу Mm, къ которой онъ необходимо долженъ быть перпендикуляренъ, потому что радіусъ круга бываетъ вездѣ перпендикуляренъ къ своей окружности.

56. Естьли въ извѣстной кривой линеѣ AM, захотимъ для какой нибудь ея точки M опредѣлить величину линеи Mn, которая на-

зывается *радiусомъ развертки*, то примѣтимъ, что Mn должна опредѣлиться стеченiемъ двухъ перпендикуляровъ MN и mn безконечно близкихъ другъ къ другу. А чтобъ увѣриться въ этомъ, то возьмемъ (*фиг.* 11) двѣ смѣжныя дуги Mm, mm' безконечно малыя и безконечно мало между собою разнящiяся, такiя притомъ, которыя можно почитать прямыми линеями; естьли проведемъ MN перпендикуляръ въ M къ Mm, и mN перпендикуляръ въ m къ mm', то въ треугольникѣ NMm прямоугольномъ въ точкѣ M получимъ 1 : *син.* $MNm = mN$ или $MN : Mm$, или по причинѣ, что уголъ MNm безконечно малъ, 1 : $MNm = mN$ или $MN : Mm$; слѣд. $MN = \frac{Mm}{MNm}$; но по продолженiи Mm, уголъ umm' выходитъ $= MNm$, потому что оба сiи угла служатъ дополненiемъ одному и тому же углу MmN; слѣд. $MN = \frac{Mm}{umm'}$.

Естьли проведемъ Mr и mr' параллельно съ AP, то не трудно примѣтить, что уголъ umr', сдѣлается равенъ mMr; слѣд. уголъ umm' есть то количество, которымъ уменьшается уголъ mMr, или представляетъ дифференцiалъ угла rMm; сей дифференцiалъ должно принимать отрицательнымъ, когда кривая линея будетъ выпуклою, а положи-

тельнымъ, когда она будетъ вогнутою; слѣд. $MN = \frac{Mm}{\mp d(rMm)}$. Сыщемъ теперь изображеніе количества $d(rMm)$. Припомнимъ, что тангенсъ rMm есть $\frac{dy}{dx}$, а косинусъ, по представленіи дуги Mm или $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ чрезъ ds, будетъ $\frac{dx}{ds}$; въ этомъ увѣриться можно по свойству прямоугольнаго треугольника rMm; но мы видѣли (24) что положивъ за величину какого нибудь угла количество z, получаемъ $dz = (кос.\ z)^2\, d(танг.\ z)$; слѣд. $d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; и такъ заключимъ наконецъ, что $MN = \frac{ds}{\mp \frac{dx^2}{ds^2}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\mp dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

Это выраженіе служитъ вообще формулою для опредѣленія радіусовъ *развертки*, по предположеніи ординатъ параллельными.

57. Для показанія на самомъ дѣлѣ употребленія сихъ формулъ, положимъ, что кривая линея AM состоитъ изъ круга, имѣющаго уравненіемъ $yy = 2ax - xx$; въ сходственность чего получимъ $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, а $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; слѣд. $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ будетъ состоять изъ $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, а $\frac{dy}{dx}$ изъ $\frac{a - x}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; и слѣд. $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-a^2dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$. И такъ приличная формула въ настоящемъ случаѣ,

гдѣ кривая линея предполагается выпуклою, а ордонаты параллельными, есть $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; но она превращается въ $\frac{\frac{a^3dx^3}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2dx^3}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}} = a$, и слѣд. показываетъ, что радіусъ развертки вездѣ одной величины и равенъ полупоперешнику круга; слѣд. развертка заключается въ одной точкѣ, то есть, въ центрѣ круга; но это въ точности сходствуетъ съ тѣми свойствами, которыя намъ извѣстны.

Возьмемъ вторымъ примѣромъ параболу, имѣющую уравненіемъ $y^2 = ax$, или $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; одифференціаливъ это уравненіе получимъ $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$; слѣд. $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{1}{4} ax^{-1} dx^2)} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{a}{4x}\right)} = dx \sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{(4x+a)}$, а $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$; слѣд. $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx$; и такъ формула $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ превращается въ $\frac{\frac{1}{8} x^{-\frac{3}{2}} dx^3 (4x+a)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \times \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx} = \frac{1}{2} \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x+a}{2} \sqrt{\left(\frac{4x+a}{a}\right)}$.

58. Радіусы развертки служатъ къ измѣренію кривизны кривой линеи въ каждой ея точкѣ. Поелику при раскрытіи элемента Nn кривой BN (*фиг.* 10), нитка прочерчиваетъ

малую дугу mm', которая имѣетъ одинакую кривизну съ кругомъ, коего радіусъ равенъ mn; то по изображенію радіуса развертки можно опредѣлить для каждой точки кривой линеи радіусъ круга, имѣющаго одинакую съ ней кривизну въ той точкѣ. А какъ кривизна круга тѣмъ болѣе бываетъ, чѣмъ радіусъ его становится меньше, то есть, кривизны круговъ содержатся въ обратномъ содержаніи своихъ радіусовъ; и такъ не трудно послѣ сего сравнить кривизну какой нибудь кривой линеи въ одной точкѣ съ кривизною той же кривой или другой во всякой иной точкѣ. На примѣръ желая сравнить кривизну параболы при началѣ ея съ кривизною, которую она имѣетъ при концѣ ордонаты, проходящей чрезъ фокусъ, замѣчу во первыхъ, что x при началѣ $= o$, и что абсцисса, отвѣчающая фокусу, состоитъ изъ $\frac{1}{4}a$ (*Алг.* 291). Слѣд. положивъ въ изображеніи радіуса развертки $x = o$, и $x = \frac{1}{4}a$, получу за радіусъ развертки при началѣ $\frac{1}{2}a$, а при концѣ ордонаты, проходящей чрезъ фокусъ $a\sqrt{2}$. Слѣд. кривизна параболы при первой изъ этихъ точекъ къ кривизнѣ при второй содержится $= a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a$, или $= 2\sqrt{2} : 1$.

Поелику радіусъ MN развертки есть нищо другое какъ нитка, покрывающая кривую

линею BN; и потому онѣ долженѣ быть равенѣ вѣ длинѣ своей дугѣ BN сѣ частію AB, которою превосходитѣ нитка кривую линею сѣ начала раскрытія, то есть, сѣ радіусомѣ развертки при началѣ A. Слѣд. можно представить кривую линею BN вѣ прямой, то есть, означить длину каждой дуги ея BN.

О ИНТЕГРАЛЬНОМЪ ИСЧИСЛЕНІИ.

59. Теперь слѣдуетѣ показать способѣ, какѣ возвращаться отѣ дифференціальныхѣ количествѣ кѣ количествамѣ конечнымѣ, изѣ коихѣ первыя произошли. Способѣ сей называется *Интегральнымѣ исчисленіемѣ*. Нѣтѣ такого перемѣннаго количества, изображеннаго Алгебраически, коего бы не можно было найти дифференціалѣ; но много находится дифференціальныхѣ количествѣ (*), которыя не можно обынтегралить: одни потому что

(*) Мы разумѣемѣ здѣсь подѣ *дифференціальнымѣ количествомѣ* не только то, которое выходитѣ изѣ дифференціацiи; но вообще всякое количество, предѣ которымѣ стоитѣ дифференціалѣ dx, dy и проч. одного или многихѣ перемѣнныхѣ.

не можно вывести ихъ ни изъ какой диффеpенціаціи, на примѣръ xdy, $xdy - ydx$ и проч. а другія потому, что не изобрѣтены еще для ихъ интеграціи способы; между послѣдними находятся такія, для которыхъ и впередъ нѣтъ надежды сыскать интегралы.

Не смотря на это, мы получаемъ весьма великую пользу и отъ тѣхъ, которыя умѣемъ интегралить; но прежде нежели разсмотримъ количества, допускающія интеграцію и недопускающія ее, изъяснимся въ нѣкоторыхъ употребительныхъ словахъ.

Мы называемъ *функціею* количества такое выраженіе исчисленія, въ которомъ заключается то количество всячески; на примѣръ x, $a + bx^2$, $\sqrt[n]{(ax^m + bx^p)}$ представляютъ функціи количества x.

Подъ названіемъ *Алгебраическихъ количествъ* разумѣемъ мы такія, коихъ можно означить точную величину, произведши надъ ними опредѣленное число Алгебраическихъ и Ариѳметическихъ дѣйствій, такихъ однакожъ, которыя не зависятъ отъ логариѳмовъ. Напротивъ того *не Алгебраическими* количествами называемъ тѣ, коихъ не можно означить настоящей величины, а толь-

ко приближенную; приближенія такого рода производятся посредствомъ логариѳмовъ и разными другими способами.

Для означенія интеграла дифференціальнаго количества мы будемъ употреблять букву $\int$, поставляя ее предъ тѣмъ количествомъ: эта буква будетъ отвѣчать слову *сумма*, потому что *интегралить* или *брать интегралъ*, есть способъ находить сумму всѣхъ безконечно малыхъ приращеній, которыя принимая количество, приходитъ въ извѣстное состояніе.

О Дифференціалахъ съ однимъ Перемѣннымъ, допускающихъ Алгебраической Интегралъ; и особенно объ одночленныхъ дифференціалахъ.

60. Главное правило. *Опредѣляя интегралъ одночленнаго дифференціала, должно 1е. усугубить показателя перемѣннаго количества единицею. 2е. Раздѣлить потомъ данной дифференціалъ на сего показателя, сложеннаго съ единицею, и умноженнаго на дифференціалъ перемѣннаго.*

Истинна сего правила основывается на выводкѣ дифференціаловъ (10). Поелику

здѣсь требуется найти самое количество, котораго данъ дифференціалъ, то безъ сомнѣнія должно употребить противныя дѣйствія тѣмъ, какія предписаны были для дифференціаціи.

Въ сходственность чего получимъ: . . . . . $\int 2x dx$ или $\int 2x^1 dx = \frac{2x^{1+1}\,dx}{(1+1)\,dx} = x^2$; $\int x dx = \frac{x^2 dx}{2dx} = \frac{x^2}{2}$. Ибо $d\,(x^2) = 2xdx$; $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2xdx}{2} = xdx$.

Равномѣрно $\int ax^{\frac{2}{3}}dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1}\,dx}{(\frac{2}{3}+1)\,dx} = \frac{ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}$.

Такимъ же образомъ $\int \frac{adx}{x^3}$ или $\int ax^{-3}dx = \ldots$ $\frac{ax^{-3+1}\,dx}{(-3+1)\,dx} = \frac{ax^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}$.

Вообще будетъ ли показатель m положительной или отрицательной, цѣлой или дробной, получаемъ всегда $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}\,dx}{(m+1)\,dx} = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$.

Это правило не нужно при опредѣленіи интеграловъ такихъ дифференціаловъ, каковы dx или adx, потому что первому, какъ явствуетъ само по себѣ, служитъ x, а второму ax. А дабы подчинить и эти дифференціалы одному правилу, то должно замѣтить, что показателемъ x почитается здѣсь o, и что дифференціалы сіи будутъ одинаковы съ слѣдующими $x^o dx$ и $ax^o dx$; но интегралы послѣднихъ сихъ по данному правилу суть $\frac{x^{o+1}\,dx}{(o+1)\,dx}$ и $\frac{ax^{o+1}\,dx}{(o+1)\,dx}$, или x и ax.

Одинъ только случай исключается изъ общаго сего правила; именно тотъ, въ которомъ показатель m будетъ имѣть величиною -1, потому что интегралъ $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, или $\frac{ax^0}{0}$, или $\frac{a}{0}$ становится въ такомъ случаѣ неизобразимымъ количествомъ, ибо оно безконечно. Въ самомъ дѣлѣ привявъ за знаменателя не нуль, но количество безконечно малое, увидимъ, что оно должно содержаться безконечное число разъ въ конечномъ количествѣ a, и слѣд. представитъ безконечную дробь. Въ послѣдствіи изъяснимъ, почему выходитъ здѣсь по вычисленію безконечное количество, а теперь замѣтимъ, что данной дифференціалъ $ax^m dx$, которой въ настоящемъ предложеніи есть тоже, что $ax^{-1}dx$ или $\frac{adx}{x}$, относится къ логариѳмическимъ дифференціаламъ; именно, онъ есть дифференціалъ количества alx или lx^a, въ чемъ легко увѣриться можно одифференціаливъ его по предписанному (27) правилу.

Естьли одночленной дифференціалъ будетъ съ радикаломъ, то вмѣсто радикала, должно поставить дробнаго показателя. На примѣръ для полученія $\int adx\sqrt[3]{x^2}$, должно интегралить $adx.x^{\frac{2}{3}}$ или $ax^{\frac{2}{3}}dx$, поступая по выше предписанному.

ПРИМѢЧАНІЕ.

61. Видѣли мы (8), что постоянные члены, заключающіеся въ количествахъ, уничтожаются въ дифференціалахъ ихъ. И такъ восходя къ интеграламъ, должно стараться прибавлять по постоянному количеству. Это постоянное получаетъ произвольную величину, пока имѣемъ одною цѣлію сыскать интегралъ, то есть, такое количество, котораго бы дифференціалъ будучи найденъ по правиламъ, сходствовалъ съ даннымъ. Въ самомъ дѣлѣ $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ и $\frac{ax^{m+1}}{m+1}+C$, (гдѣ C изображаетъ всякое постоянное) получаютъ оба одинакое дифференціальное количество $ax^m dx$, какой бы величины ни было постоянное C. Но естьли интеграція производится съ намѣреніемъ выполнить условія предложеннаго вопроса, то постоянное получаетъ величину въ силу оныхъ; мы увидимъ это со временемъ, а теперь припомнимъ, что по окончаніи каждой интеграціи будемъ всегда прибавлять постоянное, и для отличности станемъ означать его одинакою буквою C.

О Дифференціалахъ Разнородныхъ Количествъ, коихъ Интеграція относится къ предыдущему главному правилу.

62. 1е. Можно интегровать по предыдущему главному правилу всякое количество, въ которомъ разнородныя части не будутъ состоять въ степеняхъ, и въ которомъ не будетъ разнородныхъ дѣлителей, содержащихъ въ себѣ перемѣнныя.

И такъ въ слѣдующемъ дифференціалѣ $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + cdx$, должно интегралить по одиначкѣ каждой членъ; отъ чего произойдетъ $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + cx + C$. Равномѣрно за интегралъ $ax^3dx + \frac{bdx}{x^4}$, или $ax^3dx + bx^{-4}dx$ получаемъ $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$, или $\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C$.

63. 2е. Можно еще интегралить по тому же правилу и такія разнородныя количества, которыя будутъ находиться въ степеняхъ; только бы эти степени не заключались въ знаменателяхъ, и показатель ихъ былъ всегда цѣлое число и положительное.

На примѣръ данное количество $(a + bx^2)^3 \times dx$ можно обынтегралить по предыдущему же правилу, возведя $a + bx^2$ въ третью степень, которая (*Алг.* 126) будетъ $a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6$, и слѣдовательно

$(a + bx^2)^3 dx = a^3 dx + 3a^2 bx^2 dx + 3ab^2 x^4 dx + b^3 x^6 dx$; но интегралъ сего количества, взятой изъ каждаго члена, есть $a^3 x + \frac{3a^2 bx^3}{3} + \frac{3ab^2 x^5}{5} + \frac{b^3 x^7}{7} + C$.

64. Поелику нѣтъ такого разнороднаго количества, возведеннаго въ какую нибудь степень, имѣющую показателемъ цѣлое положительное число, котораго бы не можно было представить по предписанному (*Алг.* 126) правилу въ конечной строкѣ одночленныхъ; то можно интегралить всякое разнородное количество, коего каждая разнородная часть состоитъ въ степени, имѣющей показателемъ цѣлое и положительное число.

На примѣръ желая сыскать интегралъ $gx^3 dx (a + bx^2)^2 + a^2 x^7 dx (c + ex^2 + fx^3)^4$, раскрою во первыхъ по объявленному правилу величину $(a + bx^2)^2$ и умножу каждой членъ результата на $gx^3 dx$; раскрою равнымъ образомъ величину $(c + ex^2 + fx^3)^4$ и умножу каждой членъ результата на $a^2 x^7 dx$; послѣ чего обынтегрую строку одночленныхъ по главному правилу.

65. Должно отсюда изключить тотъ случай, въ которомъ количество содержитъ въ себѣ отрицательные показатели, и въ которомъ по раскрытіи и по умноженіи показатель перемѣннаго въ нѣкоторомъ изъ членовъ выходитъ -1; въ такомъ случаѣ должно интегралить посредствомъ логариѳмовъ.

На примѣръ естьли дано будетъ обынтегралить $\frac{adx}{x^3}(a + bx^2)^2$, или $ax^{-3}dx(a + bx^2)^2$; то по раскрытіи его въ слѣдующей строкѣ $ax^{-3}dx(a^2 + 2abx^2 + b^2x^4)$, и по приведеніи въ $a^3x^{-3}dx + 2a^2bx^{-1}dx + ab^2xdx$, два члена $a^3x^{-3}dx + ab^2xdx$ получаютъ интеграломъ $\frac{-a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2}$; но членъ $2a^2bx^{-1}dx$ тоже что $2a^2b\frac{dx}{x}$, представляетъ (27) логариѳмической дифференціалъ количества $2a^2blx$; слѣд. цѣлой интегралъ даннаго дифференціала состоитъ изъ $\frac{-a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2blx + C$.

66. 3е Можно еще интегралить и такое дифференціальное количество, въ которомъ степень разнородныхъ частей будетъ имѣть показателемъ цѣлое число или дробное, положительное или отрицательное; только бы цѣлость количествъ, умножающихъ разнородное, состояла изъ дифференціала того же разнороднаго количества, взятаго безъ общаго показателя; впрочемъ нѣтъ нужды до того, будетъ ли этотъ дифференціалъ умноженъ или раздѣленъ на постоянное число. Должно почитать въ такомъ случаѣ разнородное количество за одно перемѣнное, и трактовать его въ точности по главному правилу.

На примѣръ $gdx(a + bx)^p$ представляетъ такое количество, о какомъ теперь рѣчь идетъ; ибо

$g dx$ есть дифференціалЪ $a + bx$, умноженный на $\frac{g}{b}$ постоянное количество. И такЪ интеграля оное, пишу $\int g dx (a + bx)^p = \frac{g dx (a + bx)^{p+1}}{(p+1) d(a+bx)} + C =$ $\frac{g dx (a + bx)^{p+1}}{(p+1) b dx} + C = \frac{g(a+bx)^{p+1}}{(p+1) b} + C$. Ибо одифференціаливЪ это новое количество, получимЪ такое же, какое дано $g dx (a + bx)^p$.

Разсматривая такимЪ же образомЪ диффиренціалЪ $\frac{a^2 dx + 2ax dx}{\sqrt{(ax+xx)}}$, или $(a^2 dx + 2ax dx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$ найдемЪ его способнымЪ интегралить, потому что $a^2 dx + 2ax dx$ есть дифференціалЪ $ax + xx$, уноженный на постоянное a. СлѣД. поступая вЪ сходственность правила, получимЪ $\int (a^2 dx + 2ax dx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2 dx + 2ax dx)(ax + xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx + 2x dx)}$ $+ C = 2a(ax + xx)^{\frac{1}{2}} + C$.

ОдинЪ только случай изключается отсюда тотЪ, вЪ которомЪ показатель разнороднаго количества бываетЪ — 1: интегралЪ такого количества находится посредствомЪ логариѳмовЪ, какЪ мы то увидимЪ послѣ.

О ДвучленныхЪ ДифференціалахЪ, которые можно интегралить Алгебраически.

67. ПодЪ названіемЪ двучленнаго дифференціала разумѣемЪ мы такой, вЪ которомЪ сложное количество представляетЪ всякую степень двучленнаго.

На примѣрЪ $g x^5 dx (a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$ есть двучленной дифференціалЪ. Равномѣрно $g x^m dx (a + bx^n)^p$ можетЪ

представлять всякой двучленной дифференціалЪ, потому что подЪ буквами g, a, b, m, n, p можно разумѣть всякія удобовообразимыя числа положительныя или отрицательныя.

Хотя не извѣстно интегралить вообще всякое дифференціальное двучленное количество; однако изЪ предыдущаго находимЪ способЪ интегралить двучленной дифференціалЪ $gx^m dx (a + bx^n)^p$ вЪ слѣдующимЪ двухЪ случаяхЪ.

1е. Когда p представляетЪ цѣлое положительное число; до показателей m и n здѣсь никакой нужды нѣтЪ (63), выключая объявленнаго (65) случая.

2е. Когда показатель m количества x внѣ двучленнаго бываетЪ меньше единицею показателя n количества x, заключающагося вЪ двучленномЪ; то есть, можно вообще интегралить $gx^{n-1} dx (a + bx^n)^p$ не смотря на величину n и p, выключая только, когда $p = -1$. ВЪ самомЪ дѣлѣ $gx^{n-1}dx$ есть дифференціалЪ количества $a + bx^n$, умноженной на постоянное $\frac{g}{nb}$; Слѣд. это количество относится кЪ объявленному (66) случаю, и потому должно его интегралить по общему главному правилу, принимая $a + bx^n$ за одно количество.

Сверхъ этихъ двухъ случаевъ находятся еще два другіе, которые можно совокупить въ одинъ: приступимъ разсматривать ихъ.

68. 1е Можно интегралить всякой двучленной дифференціалъ, въ которомъ показатель количества x внѣ двучленнаго, будучи увеличенъ единицею, можетъ раздѣлиться въ точности на показателя количества x, содержащагося въ двучленномъ, и въ частномъ дать цѣлое положительное число. Для дѣлопроизводства такого интегрованія, равно какъ и для доказательства того, что оно имѣетъ силу вообще, стоитъ только приравнять двучленное количество (безъ общаго его показателя) къ новому перемѣнному, и выразить данной дифференціалъ посредствомъ новаго перемѣннаго и постоянныхъ; но это весьма легко можно сдѣлать, поступая по слѣдующимъ правиламъ.

Станемъ вопервыхъ искать интегралъ для gx^3dx $(a + bx^2)^{\frac{4}{5}}$. Примѣчаю, что дифференціалъ этотъ не изключается отъ интеграціи, потому что показатель 3 количества x внѣ двучленнаго, будучи увеличенъ единицею, даетъ 4; но по раздѣленіи этого числа на показателя 2 количества x, заключающагося въ двучленномъ, выходитъ въ частномъ 2 положительное и цѣлое число.

И такъ дѣлаю $a + bx^2 = z$. Изъ этого уравненія вывожу $x^2 = \frac{z - a}{b}$. Замѣчаю, что x^3dx количество, стоящее предъ двучленнымъ, происходитъ (близу по-

стояннаго множителя) изЪ дифференціаціи x^4 квадрата изЪ x^2; вЪ сходственность чего составляю квадратЪ изЪ уравненія $x^2 = \frac{z-a}{b}$, и получаю $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$; одифференціаливЪ его, нахожу $4x^3dx = 2.\left(\frac{z-a}{b}\right)\cdot\frac{dz}{b}$, и слѣд. $x^3dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{2b} = \frac{(z-a)dz}{2b^2}$. ВставивЪ вЪ количествѣ $gx^3dx\ (a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$ вмѣсто x^3dx и вмѣсто $(a+bx^2)$ величины ихЪ вЪ z, буду имѣть $\frac{g.(z-a)dz}{2b^2} \times z^{\frac{4}{5}}$, или $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}$. Слѣд. $\int gx^3dx\ (a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \frac{\int gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \frac{\int gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C$, или (по причинѣ что $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}$ есть общій множитель) $=$ $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{z}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{a}{\frac{4}{5}+1}\right) + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a\right) + C$; вставивЪ опять вмѣсто z величину его $a+bx^2$, получаю наконецЪ $\frac{g}{2b^2}(a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}\left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a\right] + C.$

69. ТакимЪ же образомЪ поступать должно во всякомЪ другомЪ подобномЪ случаѣ. ВозьмемЪ для примѣра дифференціалЪ $gx^8dx\ (a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, которой можно обынтегралить, потому что показатель 8, усугубленный единицею, то есть, 9, и раздѣленный на показателя 3 количества x, заключающагося вЪ двучленномЪ, даетЪ вЪ частномЪ цѣлое и положи-

тельное число. И такъ дѣлаю $a + bx^3 = z$ и получаю $x^3 = \frac{z-a}{b}$; а какъ количество $x^8 dx$, стоящее предъ двучленнымъ, происходитъ (безъ постояннаго множителя) изъ дифференціаціи x^9, то для полученія x^9 составляю кубъ изъ обѣихъ частей уравненія $x^3 = \frac{z-a}{b}$, и нахожу $x^9 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^3$; одифференціаливъ его для полученія $x^8 dx$, нахожу $9x^8 dx = 3 \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{b}$, и слѣд. $x^8 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{3b}$. Почему дифференціалъ $gx^8 dx\ (a + bx^3)^{-\frac{2}{3}}$ перемѣняется въ $g. \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \cdot \frac{dz}{3b} \cdot z^{-\frac{2}{3}}$, или по совершеніи означенныхъ дѣйствій, то есть, по составленіи изъ $\frac{z-a}{b}$ квадрата и по умноженіи на $z^{-\frac{2}{3}}$, въ $\frac{gz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3} dz - \frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}} dz}{3b^3} + \frac{ga^2 z^{-\frac{2}{3}} dz}{3b^3}$, коего интегралъ есть $\frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})} - \frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})} + \frac{ga^2 z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})} + C$; но это количество, по причинѣ общаго множителя $\frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}}$ превращается въ $\frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}} \left(\frac{z^2}{3-\frac{2}{3}} - \frac{2az}{2-\frac{2}{3}} + \frac{a^2}{1-\frac{2}{3}}\right) + C$, или въ $\frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}} \left(\frac{3z^2}{7} - \frac{6az}{4} + 3a^2\right) + C$, или наконецъ, послѣ вставки вмѣсто z величины его $a + bx^3$, интегралъ выходитъ $\frac{g}{3b^3}(a + bx^3)^{1-\frac{2}{3}} \left[\frac{3}{7} (a + bx^3)^2 - \frac{6a}{4}(a + bx^3) + 3a^2\right] + C$.

Вотъ способъ, по которому должно поступать во всѣхъ трехъ случаяхъ, гдѣ показатель количества x внѣ двучленнаго, усугубленный единицею и раздѣленный на показателя x, находящагося въ двучленномъ, даетъ въ частномъ цѣлое и положительное число.

70. 2е Хотя бы двучленное дифференціальное количество и не принадлежало по видимому къ упомянутому случаю; однако можно не рѣдко привести его въ такое состояніе, посредствомъ нѣкотораго весьма простаго приготовленія, въ силу котораго должно сдѣлать показателя x двучленнаго отрицательнымъ, когда онъ будетъ положительной, или на оборотъ; а для этого поступай такъ: раздѣли оба члена двучленнаго на степень x, заключающуюся въ скобкахъ, и умножь количество внѣ скобокъ на ту же степень, возведенную въ степень, означенную общимъ показателемъ двучленнаго.

На примѣръ желая сдѣлать показателя 2 количества x^2, заключающагося въ двучленномъ $gx^4dx(a+bx^2)^5$, отрицательнымъ, дѣлю $a+bx^2$ на x^2, и получаю $gx^4dx\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^5$ или $gx^4dx(ax^{-2}+b)^5$; но какъ количество x^2, на которое дѣлили мы, предполагается возведеннымъ въ пятую степень, потому что оно заключается въ двучленномъ, коего общій показатель есть 5, то должно въ замѣну умножить количество, находящееся внѣ двучленнаго на $(x^2)^5$, то есть, (*Алг.* 96) на x^{10}; отъ чего происходитъ $gx^{14}dx(ax^{-2}+b)^5$.

Дѣлая такія приготовленія, найдемъ, что многіе двучленные дифференціалы, по

видимому не относящіеся къ предыдущему случаю, будутъ наконецъ принадлежать ему.

На примѣръ, естьли дано будетъ обынтегралить $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, или $aadx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$; то хотя въ слѣдственность сказаннаго примѣчаю, что показатель x внѣ двучленнаго, то есть, о увеличенный единицею, или 1 не можетъ раздѣлиться въ точности на показателя 2 количества x, заключающагося въ двучленномъ; однако сдѣлаю ошибку, естьли заключу, что данное количество не можно интегралить; ибо сдѣлавъ степень x двучленнаго отрицательною, на примѣръ $aa(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, которое превращается въ $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, нахожу, что -3 усугубленное единицею, т. е. $-3+1$, или -2 раздѣленное на показателя -2 количества x, содержащагося въ двучленномъ, даетъ въ частномъ цѣлое и положительное число. И такъ положивъ $aax^{-2}+1=z$; вывожу $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$; а какъ $x^{-3}dx$ представляетъ (безъ постояннаго множителя) дифференціалъ изъ x^{-2}, то одифференціаливъ получаю $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$; отсюда вывожу $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$. Почему дифференціалъ $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ превращается въ $\frac{-aadz}{2aa}$. $z^{-\frac{3}{2}}$, или въ $\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, котораго интеграломъ будетъ $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2.(1-\frac{3}{2})}+C$, или $z^{-\frac{1}{2}}+C$, или (по вставкѣ вели-

чины z), $(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C$, или $\frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}}+C$; но это превращается въ $\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}+C$. Слѣд. дѣлопроизводство остается и здѣсь одинаково съ предыдущимъ случаемъ.

71. Мы предположили степень x въ одномъ только членѣ того количества, которое заключается въ скобкахъ; но естьли оная случится въ обоихъ, то для приведенія даннаго количества въ такое состояніе, въ которомъ бы степень x находилась въ одномъ членѣ, должно раздѣлить двучленное на меньшую изъ степеней, и умножить наружное количество на ту же степень, возведенную въ степень общаго показателя двучленнаго количества; это дѣлается для упомянутой (70) причины, именно, чтобъ вывесть показателя отрицательнымъ.

На примѣръ, естьли дано будетъ сыскать интегралъ для $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$, или $aax^{-1}dx(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, то должно перемѣнить его въ $aax^{-1}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$ раздѣливъ двучленное на x, и умноживъ наружное количество на x, возведенное въ общую степень $-\frac{1}{2}$ двучленнаго; послѣ чего количество сіе превратится въ $aax^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Естьли станешь трактовать это количество по правилу перваго случая (68), то найдешь его не подчинимымъ интегралу; когдаже сдѣлаешь

показателя x въ двучленномъ отрицательнымъ, то получишь $aax^{-\frac{3}{2}}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, или $aax^{-2}dx$ $(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ количество, которое (68) можно интегралить. И такъ сдѣлавъ $ax^{-1}+1=z$, вывожу x^{-1} $=\frac{z-1}{a}$; одифференціаливъ это уравненіе, получу $-x^{-2}dx=\frac{dz}{a}$, или $x^{-2}dx=\frac{-dz}{a}$; слѣд. $aax^{-2}dx$ $(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ превращается въ $-adz.\, z^{-\frac{1}{2}}$, или въ $-az^{-\frac{1}{2}}dz$, коего интегралъ есть $\frac{-az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$, или $-2az^{\frac{1}{2}}+C$, или (по вставкѣ величины z) $-2a$ $(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}+C$, или наконецъ $-2a\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}+C$.

Когда по разсмотрѣніи двучленнаго дифференціала увидимъ, что онъ не относится ни къ одному изъ обьявленныхъ двухъ случаевъ; тогда безполезно ожидать чистаго Алгебраическаго интеграла.

Что касается до дифференціаловъ трехчленныхъ, четыре-членныхъ и проч. то есть, такихъ дифференціаловъ, въ которыхъ разнородное количество заключаетъ въ себѣ три, четыре и проч. члена; то они могутъ интегроваться въ упомянутыхъ только (62 и слѣд.) случаяхъ. Есть еще нѣсколько случаевъ, гдѣ допускаются для такихъ дифференціаловъ Алгебраические интегралы; но какъ ихъ мало, и встрѣчаются рѣдко, то мы не намѣрены ими заниматься.

Вѣ послѣдствіи покажемѣ способѣ узнавать, какѣ такіе дифференціалы, которые допускаютѣ сами по себѣ интеграцію, такѣ и тѣ, которыхѣ интегралѣ можетѣ относиться кѣ другому извѣстному. —

Принаровка предыдущихъ Правилъ для Квадратуры Кривыхъ линей.

72. Дабы найти поверхность, или (что все равно) квадратуру кривыхѣ линей, то должно представить ихѣ полигонами, состоящими изѣ безчисленнаго множества боковѣ; изѣ концовѣ каждаго бока вообразить на ось абсциссѣ (*фиг.* 12) перпендикуляры MP, mp; отѣ чего поверхность раздѣлится на безчисленное множество безконечно малыхѣ трапецій. Каждую трапецію такую, какѣ $PpmM$ можно принять за дифференціалѣ конечнаго пространства APM; ибо явствуетѣ само по себѣ, что $PpmM = Apm - APM = d\,(APM)$. По допущеніи сего все дѣло состоитѣ вѣ томѣ, чтобѣ выразить Алгебраически малую трапецію $PpmM$, и по томѣ обѣинтегралить такое выраженіе по средствомѣ предыдущихѣ правилѣ.

Но принимая трапецію $PpmM$ за дифференціалѣ поверхности, должно замѣтить,

что она представляетъ не только дифференціалъ площади, считаемой отъ начала A абсциссъ, но и всякаго другаго пространства $KPML$, потому что $PpmM$ выходитъ также $= KpmL - KPML = d(KPML)$. Слѣд. обынтеграливъ этотъ дифференціалъ, не имѣемъ права приписывать интегралъ, выходящій непосредственно изъ вычисленія, ни пространству APM, ни всякому другому $KPLM$, которое разнится съ предыдущимъ постояннымъ и опредѣленнымъ пространствомъ KAL. Но надобно къ найденному интегралу прибавить постоянное количество, которое бы изобразило, чѣмъ опредѣляемое пространство разнится отъ того, которое выходитъ непосредственно по выкладкѣ. Мы увидимъ въ послѣдующихъ примѣрахъ, какъ должно опредѣлять это постоянное; а теперь начнемъ искать выраженіе пространства $PpmM$.

Назвавъ AP, x; PM, y, получимъ $Pp = dx$, $pm = y + dy$. И такъ площадь трапеціи $PpmM$ (*Геом.* 142) будетъ состоять изъ

$$\frac{PM + pm}{2} \times Pp = \frac{2y + dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dydx}{2}.$$

Но чтобъ изобразить Mm безконечно малымъ количествомъ, должно уничтожить

$\frac{dydx}{2}$ вѣ разсужденіи ydx; слѣд. ydx будетѣ служить общимѣ дифференціаломѣ или элементомѣ поверхности всякой кривой линеи.

Для употребленія этой формулы при изысканіи площади какой нибудь кривой линеи, коей уравненіе дано, должно вывести изѣ сего уравненія величину y, и вставить ее вѣ формулѣ ydx; тогда количество будетѣ состоять все изѣ однихѣ x и dx; естьли можно его обынтегралить по предыдущимѣ правиламѣ, то произойдетѣ изѣ сего интеграла, сѣ присовокупленіемѣ кѣ нему постояннаго, выраженіе поверхности кривой линеи, считаемой отѣ точки, произвольно взятой. Послѣ чего все дѣло состоитѣ вѣ томѣ, какѣ опредѣлить постоянное по допущеніи точки, отѣ которой начинается поверхность; сдѣлаемѣ примѣрѣ.

Возьмемѣ вѣ разсужденїе обыкновенную параболу, имѣющую уравненїемѣ $yy = px$. Поелику находимѣ $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, то вѣ силу сказаннаго ydx обращается вѣ $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$; но интегралѣ этого количества (60) выходитѣ $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{\frac{3}{2} dx} + C$, или $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Это послѣднее изображенїе показываетѣ площадь параболы; такѣ что по извѣстнымѣ абсциссѣ x и параметру p, можно опредѣлить величину пространства APM, или пространства $KPML$, считаемаго отѣ

опредѣленной точки K, естьли постоянное количество C будетъ извѣстно, то есть, естьли этотъ интегралъ изобразитъ точку, отъ которой начинается поверхность.

Допустимъ, что пространства получаютъ начало свое отъ точки A; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Но чтобъ узнать въ этомъ уравненіи, что за величину показываетъ C, должно примѣтить, что какъ скоро x обращается въ нуль, пространство APM само уничтожается, и уравненіе превращается въ $o = o + C$; слѣд. $C = o$. Отсюда должно заключить, что когда интегралъ изображаетъ пространства, считаемыя отъ точки A, постоянное количество C бываетъ тогда равно нулю, и слѣд. не нужно его прибавлять; и такъ общимъ изображеніемъ неопредѣленнаго пространства APM служитъ $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Но естьли начнемъ вести счетъ пространствамъ отъ точки K, при которой $AK = b$ (b означаетъ извѣстное количество), то будемъ имѣть также $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; а поелику здѣсь пространства сіи обращаются въ ничто тогда, когда AP или x становится $= b$, то выходитъ $o = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; слѣд. $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, и потому $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

Не трудно теперь понять, для чего прибавляемъ мы къ интеграламъ постоянное количество, и какимъ образомъ свойство вопроса опредѣляетъ его.

Замѣтимъ, что $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$, и притомъ $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; слѣд. $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, или $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; но поелику $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ изображаетъ пространство APM, то заключимъ, что этоже пространство будетъ имѣть выраженіемъ $\frac{2}{3}xy$, то есть, $\frac{2}{3}AP \times PM$,

или $\frac{2}{3}$ прямоугольника $APMO$, какой бы впрочемъ величины ни была AP.

Равномѣрно $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$, и притомъ какъ скоро $x = AK = b$, то уравненїе $yy = px$ превращается въ $yy = pb$; слѣд. $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, то есть, $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; въ сходственность чего $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, или $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}KL \times AK$. А какъ пространство $KPML$ имѣетъ изображенїемъ $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, то оно будетъ имѣть также $\frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, то есть $\frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

Парабола есть одна изъ всѣхъ четырехъ коническихъ сѣченїй, которую можно квадровать.

Возьмемъ вторымъ примѣромъ параболы всякаго рода, коихъ уравненїе представили мы (30) вообще чрезъ $y^{m+n} = a^m x^n$; изъ сего уравненїя выходитъ $y = \sqrt[m+n]{(a^m x^n)} = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$; слѣд. $ydx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$, коего интегралъ состоитъ изъ ......
$\frac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$, и превращается въ $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1} + C$; но это количество то же значитъ, что $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C$, или (по причинѣ, что $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$) перемѣняется въ $\frac{m+n}{m+2n} xy + C$. Ежели будемъ вести счетъ пространствамъ APM

отъ начала *A* количествъ x (*фиг*. 13), то не трудно примѣтить, что сей интегралъ не можетъ имѣть никакой величины по предположенiи *APM* равнымъ o, и слѣд. постоянное *C* уничтожается, когда $x = o$; тогда выраженiемъ получаемъ просто $\frac{m+n}{m+2n}xy$; то есть, пространство *APM* состоитъ всегда изъ опредѣленной части произведенiя xy, или прямоугольника *APMO*; часть эта изображается всегда дробью $\frac{m+n}{m+2n}$, коей величина зависитъ отъ величинъ m и n, то есть, отъ градуса параболы. И такъ можно квадровать вообще всѣ параболы.

Такимъ же образомъ найдемъ, что всѣ гиперболы, относящiяся къ асимптотамъ своимъ, выключая обыкновенныхъ, можно квадровать. Но какъ при изысканiи постояннаго количества получаемъ иногда количество неопредѣленное, то не безполезно здѣсь разсмотрѣть, что оно значитъ. Положимъ $y^m = a^{m+n}x^{-n}$ уравненiемъ такого рода кривыхъ линей; отсюда выходитъ $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}}$, и $ydx = \ldots$

$a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}} dx$, котораго интегралъ есть $\frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} + C$,

или $\frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}} + C$; но это количество таково, гдѣ безъ труда можно опредѣлить постоянное, когда m будетъ превосходить n. Когда же m будетъ меньше n, тогда выходитъ для постояннаго количество безконечное; это случается въ то время, ко-

гда будемъ вести счетъ пространствамъ отъ начала количествъ x, а конечное тогда, когда будемъ считать ихъ отъ всякой другой точки. Положимъ, что $m = 1$, а $n = 2$, въ такомъ случаѣ данное уравненїе будетъ состоять изъ $y = a^3 x^{-2}$; площадь пространства превращается въ $- a^3 x^{-1} + C$, или въ $C - \frac{a^3}{x}$. И такъ ведя счетъ пространствамъ отъ начала A абсциссъ x, должно положить $C - \frac{a^3}{x}$ равнымъ нулю, когда $x = 0$; то есть, $C - \frac{a^3}{0} = 0$, и слѣд. $C = \frac{a^3}{0}$, то есть, C представляетъ въ такомъ случаѣ безконечное количество. Напротивъ же естьли будемъ вести счетъ пространствамъ отъ точки K такой, при которой $AK = b$, то получимъ $C - \frac{a^3}{b} = 0$, и слѣд. $C = \frac{a^3}{b}$. Вотъ что значитъ постоянное количество.

Кривая линея, имѣющая уравненїемъ $y = a^3 x^{-2}$, или $y = \frac{a^3}{x^2}$ простирается безконечно вдоль по асимптотамъ AZ, AY (*фиг.* 14), приближаясь однако больше къ асимптотѣ AZ, чѣмъ къ AY, какъ-то можно вывести изъ самаго уравненїя. И такъ тѣ пространства, которыя будемъ считать отъ асимптоты AY, будутъ безконечны; потому что пространство, заключающееся между сею асимптотою и безконечною отраслью BS, есть безконечно; слѣд. не можно означить величины пространствъ $APMS$ считаемыхъ отъ асимптоты AY. Напротивъ пространства, заключающїяся между отраслью BM и асимптотою AZ, простирающеюся въ безконечность, имѣютъ конечную или опредѣленную величину, потому что отрасль на довольно короткомъ разстоянїи приближается весьма быстро къ асимптотѣ своей; такъ что пространство $KLMOZ$ безконечно большое,

или безконечно далеко простирающееся имѣетъ изображенїемъ $\frac{a^3}{b}$, а $PMOZ = \frac{a^3}{x}$; и слѣд. $KLMP = \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$. Отсюда явствуетъ, что хотя не можно опредѣлить пространствъ, считаемыхъ отъ AY, можно однакожъ опредѣлить пространства $KLMP$, считаемыя отъ точки K, взятой по близости отъ асимптоты AY, такъ близко отъ AY, какъ угодно.

Возьмемъ третьимъ примѣромъ такую кривую линею, которая имѣетъ уравненїемъ $y = \frac{aax - x^3}{aa}$, и которая относится къ *фигурѣ* 15, естьли x будутъ означать произвольныя величины, и a опредѣленную.

И такъ получимъ $ydx = \frac{aaxdx - x^3dx}{aa}$, коего интегралъ (60) есть $\int ydx$, или $APM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + C$; естьли станемъ считать пространства APM отъ точки A, начала абсциссъ x, то должно этому интегралу, когда x предположено будетъ $= 0$, сдѣлаться также равнымъ нулю; а это показываетъ, что и постоянное C не должно имѣть въ такомъ случаѣ никакой величины. Такимъ образомъ неопредѣленное пространство APM изобразится просто чрезъ $\frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$. И вообще естьли величина y состоитъ, какъ въ настоящемъ случаѣ, изъ однихъ только одночленныхъ, то всегда можно найти площадь (60).

Возьмемъ еще примѣръ, относящїйся къ площади такой кривой линеи, которая имѣетъ уравненїемъ $a^5yy = x^4(a^3 - x^3)$; изъ этого уравненїя выходитъ $y = \pm\sqrt{\left(\frac{x^4(a^3 - x^3)}{a^5}\right)} = \pm\frac{x^2}{a^2\sqrt{a}}$

$\sqrt{(a^3 - x^3)}$; и такЪ (принявЪ одну изЪ величинЪ y положительную) найдемЪ $ydx = \frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a}}\sqrt{(a^3-x^3)} = \frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a}}(a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}$; но это количество можно (66) интегралить, потому что x^2dx есть дифференціалЪ x^3, раздѣленнаго на постоянное число 3. Слѣд. вЪ сходственность (66) получимЪ $\int ydx = \ldots$ $\frac{x^2dx.\ (a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\ a^2\sqrt{a}.\ -3x^2dx} + C = -\frac{2\ (a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{9a^2\sqrt{a}} + C$. Что касается до постояннаго C, то его опредѣлитЪ та точка, отЪ которой начинается счетЪ площади.

Можно еще находить площадь кривыхЪ линей, раздѣляя ихЪ на треугольники вмѣсто трапецій. На примѣрЪ можно найти площадь сегмента ANQ (*фиг*. 12), предположивЪ его состоящимЪ изЪ безчисленнаго множества безконечно малыхЪ треугольниковЪ, каковЪ AQq. Естьли опустишь вЪ этомЪ треугольникѣ перпендикулярЪ Qt, или (что все равно) опишешь изЪ центра A радіусомЪ AQ безконечно малую дугу Qt; то площадь будетЪ имѣть изображеніемЪ $\frac{Aq \times Qt}{2}$. Тогда представивЪ AQ чрезЪ t, а дугу Qt чрезЪ dx, получимЪ $Aq = t + dt$; и слѣд. треугольникЪ $AQq = \frac{t+dt}{2}dx = \frac{tdx}{2} + \frac{dtdx}{2}$, то есть, $= \frac{tdx}{2}$ по уничтоженіи $\frac{dtdx}{2}$, какЪ такого члена, которой представляетЪ безконечно малое количесво вЪ разсужденіи

$\frac{2dx}{2}$. Напослѣдокъ дѣло кончится, когда выведемъ уравненіе въ x и t, и вставивши вмѣсто t величину его въ x, обынтегралимъ найденное такимъ образомъ количество.

Принаровка для Спрямленія Кривыхъ линей.

73. Спрямить кривую линею значитъ опредѣлить длину ея, или длину дуги ея прямою линеею. Вотъ какъ доходимъ до этого, естьли можно.

Принимая кривую линею AM (*фиг.* 12) за много-угольникъ изъ безчисленнаго множества боковъ состоящій, можно весьма малой бокъ Mm почитать за дифференціалъ дуги AM, потому что $Mm = Am - AM = d(AM)$. Естьли проведешь Mr параллельно съ AP, то произойдетъ $Mm = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; теперь все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ обынтегралить $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Но для этого должно одифференціалить уравненіе данной кривой линеи, и извлекши величину dy, изображенную въ x и dx, или величину dx, изображенную въ y и dy, вставить ее въ количествѣ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, которое будетъ состоять въ однихъ x и dx^2,

или вЪ y и dy^2; потомЪ освободивши dx^2 или dy^2 отЪ радикала (*Алг.* 107), обынтегралить его.

Для примѣра возьмемЪ изЪ параболЪ, изображенныхЪ вообще чрезЪ $y^{m+n} = a^m x^n$, ту, которая имѣетЪ уравненіемЪ $y^3 = ax^2$: вывожу изЪ него $x^2 = \frac{y^3}{a}$ и $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$; слѣд. $dx = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, а $dx^2 = \frac{9}{4}\frac{ydy^2}{a}$; слѣд. $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{9ydy^2}{4a}\right)} = dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$ (*Алг.* 107). Но это количество можно интегралить (66), потому что множитель dy двучленнаго есть дифференціалЪ тогожЪ самаго количества, раздѣленнаго на $\frac{4a}{9}$. И такЪ вЪ сходственность объявленнаго (66) получимЪ $\int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$, или $\int dy \ldots$

$$\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27} \cdots \cdots \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Что принадлежитЪ до постояннаго количества C, то вотЪ какЪ оно опредѣляется. Естьли будемЪ вести счетЪ дугамЪ AM отЪ точки A, начала y, то должно интегралу или величинѣ дуги AM сдѣлаться равнымЪ нулю, вЪ одно время сЪ y. Но какЪ скоро $y = o$, то интегралЪ превращается вЪ $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + C$, или вЪ $\frac{8a}{27} + C$; слѣд. $\frac{8a}{27} + C = o$, и $C =$

$-\frac{8a}{27}$. И такъ длина всякой дуги AM, считаемой отъ верху A, состоитъ изъ $\frac{8a}{27}\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8a}{27}$.

Естьли захотимъ узнать, находятся ли еще параболы, которыя можно спрямить, то станемъ поступать такъ: изъ уравненія $y^{m+n}=a^m x^n$, принадлежащаго вообще кривымъ линеямъ такого рода, выходитъ $y=a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$. Сдѣлавъ для легкости $\frac{m}{m+n}=k$, и $\frac{n}{m+n}=l$, получимъ $y=a^k x^l$; слѣд. $dy=l a^k x^{l-1} dx$, а $dy^2=l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2$; слѣд. $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(dx^2+l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2)}=dx\sqrt{(1+l^2 a^{2k} x^{2l-2})}$; Но это количество можно интегралить тогда только, когда $2l-2$ будетъ $=1$. Естьли перемѣнится знакъ въ показателѣ радикальнаго x, то произойдетъ другое такое количество $x^{l-1}dx\sqrt{\left(x^{-2l+2}+l^2a^{2k}\right)}$, которое (68) можно также интегралить, естьли $l-1$, усугубленное единицею и раздѣленное на $-2l+2$, дастъ въ частномъ цѣлое и положительное число, то есть, естьли $\frac{l}{-2l+2}=t$, (t представляетъ здѣсь цѣлое и положительное число). Отсюда выходитъ $l=\frac{2t}{2t+1}$, но $l=\frac{n}{m+n}$, слѣд. $\frac{n}{m+n}=\frac{2t}{2t+1}$, и $m=\frac{n}{2t}$. И такъ заключимъ, что тѣ только параболы можно спрямить, которыя будутъ отно-

ситься къ уравненію $y^{\frac{n.(2t+1)}{2t}} = a^{\frac{n}{2t}} x^{n}$, или (по извлеченіи корня n) къ $y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}} x$.

Принаровка къ Кривымъ Поверхностямъ.

74. Мы ограничимъ себя на поверхностяхъ такихъ тѣлъ, которыя происходятъ отъ обращенія какой нибудь кривой линеи *AM* (*фиг.* 16) около прямой *AP*.

Надобно себѣ представить, что во время обращенія кривой линеи *AM* около *AP*, весьма малый бокъ *Mm* описываетъ зону, или часть усѣченнаго конуса, которой служитъ элементомъ поверхности, и равенъ (*Геом.* 222) произведенію *Mm* на окружность, имѣющую радіусомъ перпендикуляръ, проведенный изъ середины *Mm* на *AP*, или все равно (потому что *Mm* представляетъ безконечно малое количество) на окружность, имѣющую радіусомъ *PM*. Притомъ же дуга $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; и такъ представивъ содержаніе радіуса къ окружности круга чрезъ $r : c$, получимъ $r : c = y$ къ окружности, которой служитъ радіусомъ *PM*, и которая будетъ состоять изъ $\frac{cy}{r}$; слѣд. элемен-

шомъ шѣлъ, произшедшихъ изъ обращенія, получимъ $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

75. Дабы употребить выведенное заключеніе на самомъ дѣлѣ, положимъ, что требуется найти поверхность шара. Естьли представимъ *AP* (*фиг.* 17) чрезъ x, а *PM* чрезъ y, то кругъ-производитель *AMB* (génerateur) будетъ имѣть уравненіемъ $yy = ax - xx$. И такъ $y = \sqrt{(ax - xx)}$, $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}$, и слѣд: $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx})} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Вставивъ въ найденной формулѣ $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ вмѣсто y и $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ величины ихъ, найдемъ $\frac{c\sqrt{(ax - xx)}}{r} \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, а по приведеніи $\frac{\frac{1}{2}acdx}{r}$, котораго интегралъ есть $\frac{\frac{1}{2}acx}{r} + C$, или просто $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, естьли будемъ считать поверхность отъ точки *A*. А какъ $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, или $\frac{\frac{1}{2}ac}{r} \cdot x$ изображаетъ поверхность цилиндра, котораго основаніе состоитъ изъ большаго круга шара, а высота изъ x, то это въ точности сходствуетъ съ доказаннымъ (*Геом.* 223).

76. Естьли пожелаемъ найти поверхность параболоида (такъ называется тѣло, произшедшее отъ обращенія параболы *AM* (*фиг.* 16) около своей оси); то по уравненію $yy = px$, выведу $x = \frac{yy}{p}$, и полу-

чу $dx = \frac{2ydy}{p}$, а $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{pp}$; слѣд. $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{pp})} = dy\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)}$. И такъ $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ обращается здѣсь въ $\frac{cydy}{r}\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)}$ количество, котораго интегралъ (67) будетъ $\frac{\frac{cydy}{r}\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{8ydy}{pp}} + C$, или по приведенiи $\frac{ppc}{12r}\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. А чтобъ это количество изображало поверхность, считаемую отъ верху A, то должно ему равняться нулю, когда $y = 0$; слѣд. оно обращается въ такомъ случаѣ въ $\frac{ppc}{12r}(1)^{\frac{3}{2}} + C$, или въ $\frac{ppc}{12r} + C$; почему $\frac{ppc}{12r} + C = 0$, то есть, $C = -\frac{ppc}{12r}$; и такъ поверхность неопредѣленнаго параболоида $AMLA$ состоитъ изъ $\frac{ppc}{12r}\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}$.

Принаровка для измѣренiя Толщины тѣлъ.

77. Толщины тѣлъ можно представить состоящими изъ слоевъ безконечно тонкихъ и параллельныхъ между собою; или состоящими изъ безчисленнаго множества пирамидъ, коихъ верхи соединяются въ одной точкѣ. Естьли представимъ ихъ состоящи-

ми изъ слоевъ безконечно тонкихъ и параллельныхъ между собою, то за разность двухъ противуположенныхъ поверхностей каждаго слоя получимъ безконечно малое количество, которое можно опустить въ выкладкѣ. Отсюда явствуетъ, что толщина каждаго слоя должна изобразиться произведеніемъ одного изъ противоположенныхъ основаній на высоту его безконечно малую. На примѣръ представивъ пирамиду *ABC* (*фиг.* 18) состоящею изъ безконечно тонкихъ слоевъ, каковы *abcdef*, можно принять за толщину этого слоя произведеніе площади *abc*, или площади *def* на высоту его.

Равномѣрно разсматривая тѣло, происшедшее отъ обращенія кривой линеи *AM* около прямой *AP* (*фиг.* 16), состоящимъ изъ параллельныхъ и безконечно тонкихъ слоевъ, должно за толщину каждаго изъ нихъ почитать произведеніе площади круга, имѣющаго радіусомъ *PM*, на высоту слоя *Pp*.

По предположеніи сего, вотъ какимъ образомъ измѣряется толщина всякаго тѣла. Представь каждой слой дифференціаломъ искомой толщины, потому что въ самомъ дѣлѣ слой $MmlL = AmlA - AMLA = d(AMLA)$

и определивъ Алгебраическое выраженіе его, сыщи потомъ интегралъ для сего выраженія.

Естьли потребуется найти толщину пирамиды $SABC$, то положивъ, что площадь ABC основанія ея равна извѣстному количеству bb, а высота $ST = h$, представлю разстояніе St какого нибудь слоя отъ верху чрезъ x; послѣ чего dx изобразитъ высоту его. Чтожъ принадлежитъ до площади abc, то она найдется (Геом. 202) по слѣдующей пропорціи $ST^2 : St^2 = ABC : abc$; то есть, $hh : xx = bb : abc = \frac{bbxx}{hh}$; и такъ толщина слоя должна состоять изъ $\frac{bbxxdx}{hh}$; но интегралъ этого количества есть $\frac{bbx^3}{3hh} + C$, или просто $\frac{bbx^3}{3hh}$, когда будемъ считать толщину отъ верху S. Сей интегралъ, изображающій толщину какой нибудь пирамидальной части $Sabc$, значитъ тоже, что $\frac{bbxx}{hh} \times \frac{x}{3}$, или $abc \times \frac{St}{3}$; но это въ точности сходствуетъ съ доказаннымъ (Геом. 242) предложеніемъ.

78. Что касается до тѣлъ, произшедшихъ отъ обращенія, то можно вывести общее выраженіе элементарнаго слоя, или дифференціала такимъ образомъ. Представивъ чрезъ $r : c$ содержаніе радіуса къ окружности круга, получимъ за окружность, имѣющую радіусомъ PM (фиг. 16) или y, четвертой членъ въ слѣдующей пропорціи $r : c = y :$

$\frac{cy}{r}$; естьли умножимЪ величину $\frac{cy}{r}$ означенной окружности на $\frac{1}{2}y$ половину радіуса, то произойдетЪ $\frac{cy^2}{2r}$ площадь круга, которую умноживЪ на высоту Pp или dx, получимЪ $\frac{cy^2dx}{2r}$ выраженіемЪ элемента толщины того тѣла. А чтобЪ примѣнить это ко всякому частному случаю, то должно вставить вмѣсто y величину его вЪ x, выведенную изЪ уравненія кривой линеи AM, произведшей то тѣло, и потомЪ сыскать интегралЪ.

79. Возьмем въ примѣрЪ эллипсоидЪ, тѣло, которое происходитЪ отЪ обращенія эллипсиса около большой его оси (*фиг.* 19). НазвавЪ AP, x; PM, y; а оси AB и Dd, a и b, получимЪ уравненіемЪ эллипсиса $yy = \frac{bb}{aa}\cdot(ax - xx)$. ВЪ сходственность доказаннаго формула $\frac{cy^2dx}{2r}$ должна превратиться здѣсь вЪ количество $\frac{cbb}{2raa}\cdot dx\,(ax - xx)$, или вЪ $\frac{cbb}{2raa}$ . . . . . . $(axdx - x^2dx)$ котораго интегралЪ состоитЪ изЪ $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$, или просто изЪ $\frac{cbb}{2raa}$ . . . $\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, естьли станемЪ считать толщину отЪ точки A.

Для опредѣленія толщины всего эллипсоида, должно предположить $x = AB = a$; послѣ чего произойдетЪ $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{8}\right)$, или по приведеніи $\frac{cabb}{12r}$; но

это количество тоже значитъ, что $\frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3} a$, или $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3} a$; а какъ $\frac{cbb}{8r}$ изображаетъ площадь круга, имѣющаго b или Dd поперечникомъ, то $\frac{cbb}{8r} \times a$ должно выражать толщину цилиндра, описаннаго около эллипсоида; поелику же толщина эллипсоида означается здѣсь чрезъ $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3} a$, то заключимъ, что она состоитъ изъ $\frac{2}{3}$ описаннаго около его цилиндра. А какъ шаръ есть тотъ же эллипсоидъ, коего обѣ оси равны между собою, то явствуетъ также, что и толщина шара состоитъ изъ $\frac{2}{3}$ описаннаго около его цилиндра; но это согласно съ доказаннымъ нами (Геом. 245) предложенїемъ.

80. Естьли станемъ считать толщину отъ опредѣленной точки K такой, отъ которой разстоянїе $AK = e$; то общїй интегралъ, состоящїй изъ $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$, долженъ перемѣниться при той точкѣ, гдѣ $x = e$, въ $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C$, и обратиться въ нуль; слѣд. $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C = 0$, и $C = -\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$. И такъ толщина, считаемая отъ точки K, будетъ имѣть изображенїемъ $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$. Это выраженїе принадлежитъ слою эллипсическаго сфероида, заключающемуся между двумя параллельными плоскостями, къ которымъ ось перпендикулярна, и которыхъ разстоянїе равно $x - e$.

81. Сыщемъ, для втораго примѣра, толщину параболоида (фиг. 16). По параболическому уравненїю $yy = px$, формула $\frac{cy^2dx}{2r}$ обращается въ $\frac{cpxdx}{2r}$, коего интегралъ будетъ $\frac{cpx^2}{4r} + C$, или $\frac{cpx}{2r} \times \frac{x}{2} + C$;

вставивъ вмѣсто px величину его yy, получимъ $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Есть ли станемъ вести счетъ толщинѣ отъ точки A, то по причинѣ, что толщина эта уничтожается, какъ скоро $x = o$, постоянное C должно также обратиться въ нуль; слѣд. толщина изобразится въ этомъ случаѣ чрезъ $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$. А какъ $\frac{cyy}{2r}$ означаетъ площадь круга, имѣющаго радіусомъ PM, или означаетъ основаніе параболоида $AMLA$; то слѣдуетъ заключить, что толщина параболоида состоитъ изъ половины произведенія основанія его на высоту x; слѣд. параболоидъ равенъ половинѣ такого цилиндра, которой имѣетъ съ нимъ одно основаніе и одну высоту.

Но когда начнемъ считать толщину отъ извѣстной точки K, при которой $AK = e$; тогда общій интегралъ $\frac{cpx^2}{4r} + C$ перемѣнившись при этой точкѣ, гдѣ $x = e$, въ $\frac{cpe^2}{4r} + C$, долженъ равняться нулю; слѣд. $\frac{cpe^2}{4r} + C = o$, и $C = -\frac{cpe^2}{4r}$. И такъ толщина параболоидальнаго слоя, заключающагося между двумя параллельными плоскостями, коихъ разстояніе $= x - e$, состоитъ изъ $\frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpe^2}{4r}$. Посредствомъ этого можно сдѣлать выкладку подкопнымъ изверженіямъ.

По многимъ опытамъ найдено, что въ однородныхъ земляхъ, коихъ поверхность MN (*фиг.* 20) горизонтальна, заключенный въ минѣ порохъ производитъ изверженіе параболоидальной фигуры MAN, которой фокусомъ служитъ центръ K камеры, изъ которой разстояніе KP (это разстояніе называется линеею мень-

шой противности) отъ фокуса къ плоскости основанія MN закупорки, бываетъ равно половинѣ діаметра тогожъ основанія. Вотъ какъ по этимъ извѣстнымъ частямъ можно вычислить толщину $NOLM$, которая силою пороха взрывается.

Представивъ чрезъ a линею $KP = PM$, получимъ по свойству параболы $\frac{aa}{a+e} = 4e$ (e предполагается здѣсь $= AK$); отсюда выходитъ $e = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; слѣд. $x = a + e = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{2})$, и слѣд. $xx - ee = a^2\sqrt{2}$; а какъ $p = 4e$, то найдемъ, что $p(xx - ee) = 2a^3\sqrt{2}(-1+\sqrt{2}) = 2a^3(2-\sqrt{2})$. Почему искомая толщина, изображенная вообще чрезъ $\frac{cp}{4r}(x^2 - e^2)$, будетъ состоять здѣсь изъ $\frac{c}{2r}a^3(2-\sqrt{2}) = \frac{355}{113} \times a^3$ $(2 - 1,4142135)$ $= 1,8403012\, a^3$; то есть, близу $\frac{46}{25}$ куба изъ линеи меньшой противности.

Мы не включаемъ сюда части LAO, которую сила взорваннаго пороха производитъ давленіемъ своимъ на дно закупорки.

82. Можно еще взять для примѣру *гиперболоидъ*, или тѣло, которое происходитъ отъ обращенія гиперболы около своей оси. Можно также сыскать толщину эллипсоида по меньшей его оси, и которой называется *сжатымъ эллипсоидомъ*; а тотъ, которой раждается отъ обращенія эллипсиса около большой оси, именуется *продолговатымъ эллипсоидомъ*. Мы найдемъ, какъ показано было выше, что сжатый эллипсоидъ состоитъ так-

же изъ $\frac{2}{3}$ цилиндра около его описаннаго; и принявъ a и b за большую и за меньшую ось эллипсиса-производителя (générateur), получимъ $\frac{cabb}{12r}$ толщиною продолговатаго эллипсоида, а $\frac{caab}{12r}$ толщиною сжатаго. И такъ продолговатый эллипсоидъ къ сжатому содержится $= \frac{cabb}{12r} : \frac{caab}{12r} = b : a$, какъ меньшая ось къ большой.

Хотя довольно изъяснено о тѣлахъ происходящихъ отъ обращенія; однако чтобъ утвердить начинающихъ больше въ приктикѣ, сдѣлаемъ еще примѣръ.

83. Положимъ, что требуется сыскать такую толщину, которая отрѣзана отъ цилиндра по косой плоскости къ основанію его, и для легкости допустимъ разрѣзъ проходящимъ чрезъ центръ, какъ явствуетъ на самомъ тѣлѣ *ADEB* (*фиг.* 21).

Есльли вообразимъ это тѣло разсѣченнымъ плоскостями на слои безконечно тонкія, параллельныя между собою и перпендикулярныя къ основанію *AEB* (*фиг.* 22), то этѣ сѣченія представятъ изъ себя подобные треугольники, коихъ площади будутъ содержаться какъ квадраты сходныхъ боковъ ихъ.

Итакъ принявъ r за радіусъ CE основанія, h за высоту DE, и y за основаніе PM треугольника PMN, получимъ $CED : PMN = rr : yy$; при томъ же $CED = \frac{rh}{2}$; слѣд $PMN = \frac{rhyy}{2rr} = \frac{hyy}{2r}$; потомъ представивъ AP чрезъ x, получимъ dx за высоту Pp слоя, содержащагося между двумя ближайшими плоскостями; и слѣд. толщина этого слоя будетъ состоять изъ $\frac{hyydx}{2r}$. а какъ y изображаетъ ордонату круга, служащаго основаніемъ цилиндру, то выходитъ $yy = 2rx - xx$; слѣд. толщина элементарнаго слоя превращается въ $\frac{hdx(2rx - xx)}{2r}$, или въ $\frac{h}{2r}$. $(2rxdx - xxdx)$, коего интеграломъ, ведя щотъ толщинамъ отъ точки A, получимъ $\frac{h}{2r}\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$. А чтобъ опредѣлить толщину всего тѣла, то должно предположить $x = 2r$, отъ чего происходитъ $\frac{h}{2r} \times \left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right)$, или $\frac{2}{3} hr^2$ или $\frac{hr}{2} \times \frac{4}{3} r$, или $CED \times \frac{4}{3} AC$, или наконецъ $CED \times \frac{2}{3} AB$; то есть толщина искомаго тѣла равна двумъ третямъ призмы, имѣющей основаніемъ треугольникъ CED, а высотою діаметръ AB.

Объ Интегралахъ количествъ, заключающихъ въ себѣ Синусы и Косинусы.

84. Интеграція количествъ, заключающихъ въ себѣ синусы и косинусы, совершенно основывается на томъ же правилѣ (22), какое показано было для опредѣленія дифференціаловъ этихъ количествъ.

Мы видѣли прежде, что d (*син.* z) $=$ dz *кос.* z, и что d (*кос.* z) $= - dz$ *син.* z; слѣд. на оборотъ интегралъ дифференціала dz *кос.* z будетъ *син.* z, или вообще *син.* $z + C$ количество, имѣющее одинакой съ предыдущимъ дифференціалъ. Равномѣрно интегралъ $- dz$ *син.* z будетъ состоять изъ *кос.* $z + C$. Къ этимъ двумъ случаямъ должно относить интеграцію всѣхъ прочихъ количествъ, состоящихъ изъ синусовъ и косинусовъ, наблюдая притомъ правила, которыя предписаны были вообще для производства интеграловъ. Вотъ примѣры.

Естьли дано будетъ сыскать интегралъ для dz *кос.* $3z$, то представивъ дифференціалъ этотъ въ такомъ видѣ $\frac{3dz \text{ кос. } 3z}{3}$, получимъ $\frac{\text{син. } 3z}{3} + C$ интеграломъ его. Равномѣрно для dz *син* $3z$, изобразивъ его такъ $\frac{- 3dz \text{ син. } 3z}{- 3}$, найдемъ интеграломъ $\frac{\text{кос. } 3z}{- 3} + C$.

Вообще $\int dz$ *син.* mz (m означаетъ постоянное число), перемѣняясь въ $\frac{\int - mdz.\ син.\ mz}{-m}$, становится $= \frac{-\ кос.\ mz}{m} + C$.

Естьли дано будетъ такое количество (*син.* $z)^n$ dz *кос.* z; то замѣтивъ, что оно означаетъ тоже, что (*син.* $z)^n\, d$(*син.* z), и принявъ *син.* z за простое перемѣнное, найдемъ интеграломъ этого количества по главному правилу $\frac{(син.\ z)^{n+1}}{n+1} + C$.

Естьли данной дифференціалъ будетъ (*син.* $mz)^n$ dz *кос.* mz, то написавъ его такъ $\frac{(син.\ mz)^n\, mdz\ кос.\ mz}{m}$, что обращается въ $\frac{(син.\ mz)^n\, d\,(син.\ mz)}{m}$, получимъ интеграломъ $\frac{(син.\ mz)^{n+1}}{m\,(n+1)} + C$.

Равномѣрно интегралъ слѣдующаго дифференціала (*кос.* $mz)^n$ dz *син.* mz, по представленіи его $\frac{(кос.\ mz)^n.\ - mdz\ син.\ mz}{-m}$, будетъ $\frac{(кос.\ mz)^{n+1}}{-m\,(n+1)} + C$.

Естьли потребуется сыскать интегралъ для dz *син.* pz *кос.* qz; то припомнивъ, что (*Геом.* 286) по допущеніи a и b углами, получимъ *син.* $(a+b)$ $=$ *син.* a *кос.* b $+$ *син.* b *кос.* a, и *син.* $(a-b) =$ *син.* a *кос.* b $-$ *син.* b *кос.* a; отсюда заключаемъ *син.* a *кос.* b $=$ $\frac{1}{2}$ *син.* $(a+b)$ $+$ $\frac{1}{2}$ *син* $(a-b)$.

Равномѣрно видѣли мы (*Геом.* 287), что *кос* $(a+b) =$ *кос.* a *кос.* b $-$ *син.* a *син.* b, и *кос.* $(a-b)$ $=$ *кос.* a *кос.* b $+$ *син.* a *син.* b; слѣд. *кос.* a *кос.* b $=$ $\frac{1}{2}$ *кос.* $(a+b)$ $+$ $\frac{1}{2}$ *кос.* $(a-b)$, и *син.* a *син.* b $=$ $\frac{1}{2}$ *кос.* $(a-b)$ $-$ $\frac{1}{2}$ *кос.* $(a+b)$.

ВЪ сходственность этихЪ правилЪ, можно перемѣнить *син.* pz *кос.* qz вЪ $\frac{1}{2}$ *син.* $(pz + qz) + \frac{1}{2}$ *син* $(pz - qz)$, или вЪ $\frac{1}{2}$ *син.* $(p+q)\,z + \frac{1}{2}$ *син.* $(p-q)\,z$. И такЪ надобно теперь интегралить такое количество $\frac{1}{2}\,dz$ *син.* $(p+q)\,z + \frac{1}{2}\,dz$ *син.* $(p-q)\,z$, которое представивЪ вЪ слѣдующемЪ видѣ ...... $\frac{1}{2}\frac{(p+q)\,dz \text{ син.} (p+q)\,z}{p+q} + \frac{1}{2}\frac{(p-q)\,dz \text{ син.} (p-q)\,z}{p-q}$ будемЪ имѣть $\frac{-\frac{1}{2}\text{ кос.}(p+q)\,z}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\text{ кос.}(p-q)\,z}{p-q} + C$ интеграломЪ его.

ТакимЪ же образомЪ найдемЪ интегралЪ для dz *син.* pz *кос.* qz *син.* rz и проч., превративши произведенія сіи вЪ синусы или косинусы суммы или разности дугЪ pz, qz, rz и проч. по предыдущимЪ правиламЪ.

Естьли дано будетЪ dz (*син.* $z)^3$, то перемѣни его вЪ dz *син.* z (*син.* $z)^2$; но (*син.* $z)^2$ или *син.* $z \times$ *син.* z по выше означеннымЪ правиламЪ $= \frac{1}{2}$ *кос.* $(z-z)$ $- \frac{1}{2}$ *кос.* $(z+z) = \frac{1}{2}$ *кос.* $0 - \frac{1}{2}$ *кос.* $2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ *кос.* $2z$, потому что *кос.* $0 = 1$; слѣдовательно *син.* z (*син.* $z)^2 =$ $\frac{1}{2}$ *син.* $z - \frac{1}{2}$ *син.* $z \times$ *кос.* $2z$; слѣд. dz (*син.* $z)^3 = \frac{1}{2}$ dz *син.* $z - \frac{1}{2}\,dz$ *син.* z *кос.* $2z$; потомЪ сдѣлавЪ приведеніе *син.* z *кос.* $2z$, какЪ показано было для *син.* pz *кос.* qz, сыщи интегралЪ его. Отсюда явствуетЪ, какЪ должно интегралить dz (*син.* $z)^n$ и dz (*кос.* $z)^n$, n представляетЪ цѣлое и положительное число. Слѣд. можно по изЪясненнымЪ правиламЪ интегралить количества и такого вида, dz (*син.* $pz)^m$ (*кос.* $qz)^n$ (*син.* $rz)^s$ и проч. m, n, s изображаютЪ цѣлыя и положительныя числа.

НаконецЪ по этимЪ же правиламЪ и по изЪясненнымЪ выше для интеграціи количествЪ, можно интегралить всѣ дифференціалы, заключающіе вЪ

себѣ синусы и косинусы, естьли только они способны принять алгебраической интегралъ. Когдажъ дифференціалы будутъ содержать тангенсы, то должно приводить ихъ въ дифференціалы, состоящіе изъ синусовъ и косинусовъ, памятуя, что *танг. z* $=$ $\frac{\textit{син. z}}{\textit{кос. z}}$ (24).

О Способѣ интегралить чрезъ Приближеніе, и о нѣкоторыхъ употребленіяхъ этого способа.

85. Способъ сей не принадлежитъ къ одночленнымъ дифференціаламъ, потому что интегралы ихъ можно находить и безъ него; но относится къ дифференціаламъ тѣхъ разнородныхъ количествъ, коихъ мы прежде не въ состояніи были интегралить.

Сыскивая интегралы чрезъ приближеніе, представляемъ данное количество строкою одночленныхъ, коихъ величина постепенно уменьшается; каждой членъ этой строки интегруется весьма легко, и довольно взять ихъ нѣкоторое число, чтобъ получить достаточную величину для цѣлаго интеграла.

Правило, показанное (*Алг.* 128) для возведенія двучленнаго количества въ данную степень, и принадлежащее равно до количествъ многочленныхъ, послужитъ намъ и

здѣсь къ изысканію интеграловъ такого рода. Вотъ и примѣры.

86. Спрашивается найти длину дуги круга AM (*Фиг.* 17) посредствомъ обращеннаго синуса его AP?

Естьли предположивъ дугу Mm безконечно малою, проведу Mr параллельно съ AP и радїусъ CM, то въ подобныхъ треугольникахъ CPM, Mrm, получу $PM : CM = Mr : Mm$. Представивъ AP чрезъ x, дїаметръ AB чрезъ a, или для легкости чрезъ 1, буду имѣть $Mr = dx$, $CM = \frac{1}{2}$, а $PM = \sqrt{(x - xx)}$. Въ силу этого выведенная пропорцїя $\sqrt{(x - xx)} : \frac{1}{2} = dx : Mm = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, и слѣд. $AM = \frac{\int \frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$. Но поелику не можно сыскать интеграла для этого количества по изъясненнымъ выше правиламъ, то и перемѣняю его въ $\frac{\int \frac{1}{2} dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 - x)}}$, потомъ въ $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$. Представляю $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ строкою (*Алг.* 128), и нахожу, сдѣлавъ надлежащее приведенїе членамъ, $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3$ и проч. слѣд. $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \ldots (1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 +$ и проч.$) = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx +$ и проч. $= \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32} x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} +$ и проч. $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112} x^{\frac{7}{2}}$ + и проч. Къ этому количеству не нужно прибавлять постояннаго, потому, что когда $x = o$,

оно обращается само въ нуль; ибо дуга AM уничтожается въ такомъ случаѣ.

Можно по причинѣ общаго множителя $x^{\frac{1}{2}}$ дать строкѣ, изображающей дугу AM, другой такой видъ $x^{\frac{1}{2}}$ $(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 +$ и проч.). Замѣтимъ теперь, что синусъ обращенный бываетъ всегда меньше діаметра 1 и долженъ представлять дробь его; слѣд. величина строчныхъ членовъ тѣмъ больше будетъ уменьшаться, чѣмъ синусъ обращенной будетъ относиться къ меньшой дугѣ. Почему желая опредѣлить длину такой дуги, которой синусъ обращенной состоитъ изъ сотой части діаметра, получимъ $x = \frac{1}{100} = 0,01$, $x^{\frac{1}{2}} = 0,1$; въ сходственность этого величиною искомой дуги будемъ имѣть $0,1\left[1 + \frac{0,01}{6} + \frac{3(0,01)^2}{40} + \frac{5}{112}(0,01)^3\right]$. Но поелику послѣдующій за сими строчной членъ долженъ быть по крайней мѣрѣ во сто разъ меньше того, которой теперь находится послѣднимъ, то по изслѣдованіи величины члена $\frac{5}{112}(0,01)^3$, и взявши изъ нее сотую долю, не трудно заключить, до какой точности достигаетъ дуга по первымъ четыремъ членамъ. Но $\frac{5}{112}(0,01)^3$ превращается въ $\frac{5}{112}$ $(0,000001) = \frac{0,000005}{112} = 0,0000000446$, коего сотая доля состоитъ изъ 0,000000000446; слѣд. со всякою надежностію можемъ исчислить каждой членъ выведенной строки до десяти десятичныхъ знаковъ, не опасаясь погрѣшности ниже на единицу въ девятой цифрѣ. И такъ получимъ $\frac{5}{112}(0,01)^3 = 0,0000000446$; $\frac{3}{40}(0,01)^2 = 0,0000075000$; $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$; слѣд.

сумма всѣхъ членовъ строки будетъ состоять изъ 0,1 (1,0016742112), или наконецъ изъ 0,100167421 по допущенїи девяти только десятичныхъ знаковъ, хотя можно со всякою надежностїю допустить и десятой.

Такова величина дуги, которой обращенной синусъ равенъ сотой части дїаметра. Естьлибъ извѣстно было, сколько разъ число градусовъ этой дуги содержится въ 360°, то умноживъ длину ея на это число разъ, получили бы въ произведенїи длину, весьма близко подходящую къ окружности; но содержанїе сїе намъ неизвѣстно.

Поелику сказано было (*Геом.* 275), что синусъ 30° равенъ половинѣ радїуса; и что по извѣстному синусу какой нибудь дуги опредѣляется синусъ обращенной ея (*Геом.* 283); то стоило бы теперь вычисливши обращенной синусъ 30°, вставить его вмѣсто *x* въ означенной выше строкѣ, и потомъ умножить результатъ на 12, число, сколько разъ 30° содержатся въ 360°; въ произведенїи бы нашли такую длину, которая бы сходствовала съ окружностїю. Но какъ строка въ этомъ случаѣ выходитъ мало сближающаяся, и потому для совершенной точности нужно исчислять весьма много членовъ; то мы оставимъ *эту выкладку*, а покажемъ другую, которая вмѣстѣ послужитъ вторымъ примѣромъ способа интегралить чрезъ приближенїе.

Естьли проведемъ тангенсъ *AN* (*Фиг.* 23), секинсъ *CMN* и секансъ *Cmn* въ безконечно близкомъ разстоянїи отъ перваго; потомъ изъ центра *C* радїусомъ *CN* опишемъ безконечно малую дугу *Nr*, которую можно почесть за перпендикуляръ къ *Cn*; то произойдетъ маленькой прямоугольной треугольникъ *Nrn*, подобный прямоугольному треугольнику *CAn*, потому что они сверьхъ прямаго угла имѣютъ еще

еще общій при n; сей треугольникъ будетъ также подобенъ треугольнику CAN, которой безконечно мало отличается отъ CAn; въ сходственность сего получимъ пропорцію $CN : CA = Nn : Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$, а въ подобныхъ секторахъ CNr, CMm, другую такую $CN : CM$ или $CA = Nr$ или $\frac{CA \times Nn}{CN} : Mm$; слѣд. $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2}$. Естьли положимъ $AN = x$, радіусъ $CA = a$, то $Nn = dx$, а $CN = \sqrt{(aa + xx)}$; слѣд. величина Mm сдѣлается $= \frac{aadx}{aa + xx}$, а $\int Mm$ или $AM = \frac{\int aadx}{aa + xx}$. Это количество не можно интегралить въ точности, а чрезъ приближеніе; и для того должно представить его въ семъ видѣ $\int aadx\,(aa + xx)^{-1}$; нашедши (*Алг.* 128), что $(aa + xx)^{-1} = a^{-2}\,(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$ — и проч.), будемъ имѣть $\int aadx\,(aa + xx)^{-1} =$ $\int dx\,(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$ — и проч.) $= \ldots\ldots$ $\int (dx - \frac{x^2dx}{a^2} + \frac{x^4dx}{a^4} - \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8}$ — и проч.) $= x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8}$ — и проч. $= \ldots\ldots$ $x\,(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8}$ — и проч.).

Теперь остается узнать такую дугу, которая бы содержалась извѣстное число разъ въ окружности, и имѣла притомъ извѣстной тангенсъ. Но мы видѣли (*Геом.* 276), что дуга 45° содержится въ окружности 8 разъ, и тангенсъ ея равенъ радіусу; слѣд. положивъ $x = a$, получимъ длиною дуги 45° сумму членовъ такой строки $a\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$

+ и проч). А какъ члены въ этой строкѣ убываютъ очень медленно, то посмотримъ, не можно ли раздѣлить дуги 45° на двѣ другія, которыхъ бы тангенсы были извѣстны. Нѣтъ никакой нужды до числа градусовъ каждой изъ сихъ дугъ въ особенности, но нужно только то, чтобъ онѣ вмѣстѣ составляли 45°. Тогда вычисливши длину каждой посредствомъ тангенсовъ, получимъ въ суммѣ ихъ длину дуги 45°; а поелику каждая изъ этихъ дугъ меньше 45°, то и тангенсы ихъ должны быть меньше радіуса; слѣд. строка будетъ сближаться больше, и выкладка членовъ сдѣлается легче.

То, что изъяснили мы (*Геом.* 282), можетъ способствовать намъ здѣсь къ опредѣленію двухъ такихъ дугъ. Въ самомъ дѣлѣ предположивъ a и b двумя дугами, будемъ имѣть $\text{танг.}(a+b) = \frac{\text{син.}(a+b)}{\text{кос.}(a+b)} = \frac{\text{син.}\,a\ \text{кос.}\,b + \text{син.}\,b\ \text{кос.}\,a}{\text{кос.}\,a\ \text{кос.}\,b - \text{син.}\,b\ \text{син.}\,a}$ (*Геом.* 286 и 287); раздѣливъ числителя и знаменателя на $\text{кос.}\,a\ \text{кос.}\,b$, выведемъ $\text{танг.}(a+b) = \frac{\frac{\text{син.}\,a}{\text{кос.}\,a} + \frac{\text{син.}\,b}{\text{кос.}\,b}}{1 - \frac{\text{син.}\,a\ \text{син.}\,b}{\text{кос.}\,a\ \text{кос.}\,b}}$, то есть, $\text{танг.}(a+b) = \frac{\text{танг.}\,a + \text{танг.}\,b}{1 - \text{танг.}\,a\ \text{танг.}\,b}$. Естьли допустимъ $a + b = 45^\circ$, то получимъ $\text{танг.}(a+b) = 1$, а изъ уравненія $\frac{\text{танг.}\,a + \text{танг.}\,b}{1 - \text{танг.}\,a\ \text{танг.}\,b} = 1$ выведемъ по обыкновеннымъ правиламъ $\text{танг.}\,b = \frac{1 - \text{танг.}\,a}{1 + \text{танг.}\,a}$. Наконецъ положивъ $\text{танг.}\,a = \frac{1}{2}$, найдемъ $\text{танг.}\,b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Теперь остается вычислить посредствомъ вышеозначенной строки длину дуги, которой тангенсъ

$x = \frac{a}{2}$ половинѣ радїуса, и длину дуги, которой тангенсъ $x = \frac{a}{3}$; сумма этихъ дугъ покажетъ длину дуги 45°. Естьли вставимъ $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{3}$ вмѣсто x, то выдутъ двѣ такїя строки, $\frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} \ldots - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} - \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{12}}\right.$ и проч.), и ..... $\frac{a}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} - \frac{1}{11 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{12}}\right.$ и проч.).

Естьли захотимъ имѣть величину каждой дуги изображенною въ точности до девяти десятичныхъ знаковъ, то должно вычислить 15 первыхъ членовъ въ первой строкѣ, и десять во второй. Но эту выкладку не трудно сдѣлать, замѣтивъ, что въ первой строкѣ можно опредѣлить послѣдующїе члены составленїемъ такого порядка, въ которомъ бы каждой членъ равнялся своему предыдущему, умноженному на $\frac{1}{2^2}$, или состоялъ изъ $\frac{1}{4}$ его; потомъ умножь члены выведенной такимъ образомъ строки на сходственные члены слѣдующей 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ и проч. Наконецъ сложивъ члены съ знакомъ + между собою, и члены съ знакомъ — также, сумму послѣднихъ вычти изъ суммы первыхъ, и остатокъ умножь на $\frac{a}{2}$. Равномѣрно для выкладки членовъ второй строки, составь напередъ такой порядокъ членовъ, изъ которыхъ бы каждой равнялся $\frac{1}{3^2}$ или $\frac{1}{9}$ предыдущаго; потомъ поступая также, какъ съ первою строкою, умножь результатъ на $\frac{a}{3}$. По окон-

чаніи дѣлопроизводства, въ которомъ приближеніе простирается до десяти десятичныхъ знаковъ, получишь величиною первой строки $\frac{a}{2}$ (0,9272952180), или a (0,4636476090); а величиною второй $\frac{a}{3}$ (0,9652516632), или a (0,3217505544). Слѣд. дуга 45° состоящая изъ суммы этихъ двухъ величинъ, будетъ равна a (0,7853981634); учетверивши ее, получимъ a (3,1415926536). Слѣд. радіусъ къ половинѣ окружности круга (или поперешникъ къ цѣлой окружности) содержится $= a : a$ (3,1415926536) $= 1 :$ 3,1415926536. Это содержаніе разнится меньше, чѣмъ на половину единицы въ десятой цифрѣ отъ того, которое показано было (*Геом.* 146); но можно еще съ большею точностію опредѣлить его.

87. Предложимъ третьимъ примѣромъ найти логариѳмъ всякаго числа. Но прежде припомнимъ сказанное (27), именно, что логариѳмы, о которыхъ теперь дѣло идетъ, не таковы, какіе содержатся въ обыкновенныхъ таблицахъ; совсѣмъ тѣмъ научившись вычислять первые, можно узнавать всегда по величинѣ ихъ величину табличныхъ, и на оборотъ; что мы тотчасъ и увидимъ.

Представляю данное число раздѣленнымъ на двѣ части, и именно чрезъ $a + x$, a означаетъ большую часть. По изъясненному (27) нахожу d лог. $(a + x) = \frac{dx}{a+x}$, количество, которое не можно ин-

тегралить Алгебраически; и потому привожу его въ строку, изобразивъ напередъ чрезъ $dx\ (a + x)^{-1}$. Вывожу (Алг. 128) $(a + x)^{-1} = a^{-1}(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} +$ и проч.$) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$; слѣд. $dl\ (a + x) = dx\ (a + x)^{-1} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4}$ и проч., котораго интеграломъ будетъ $l\ (a + x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$ и проч. $+ C$. Для опредѣленія постояннаго количества C, замѣчаю вопервыхъ, что это уравненіе должно всегда состояться, какой бы величины ни было x; и такъ предположивъ $x = o$, получаю $la = C$; слѣд. $C = la$, и $l\ (a + x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ и проч. Наконецъ узнавши логариѳмъ одного какого нибудь числа, можно по этой строкѣ опредѣлить логариѳмъ всякаго другаго. На примѣръ положивъ $a = 10$, и $a + x = 11$, получимъ $x = 1$, и слѣд. $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$; отсюда явствуетъ, что $l11 = l10 + 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} + \frac{(0{,}1)^3}{3}$ и проч. По этому выраженію заключаю, что нужно прибавить къ логариѳму 10 для опредѣленія логариѳма 11.

Но какъ выведенная теперь строка часто бываетъ не довольно сближающеюся, то вотъ другой способъ находить логариѳмы. Положимъ, что требуется сыскать логариѳмъ такой дроби, въ которой числитель больше знаменателя, мы увидимъ скоро,

что опредѣленіе всякаго логариѳма можно подвести подъ этотъ случай.

Представивъ чрезъ a сумму числителя и знаменателя этой дроби, а чрезъ x разность ихъ, получимъ (*Геом.* 305) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$ числителемъ ея, а $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$ знаменателемъ; слѣд. $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$, или (по уничтоженіи общаго фактора $\frac{1}{2}$) $\frac{a+x}{a-x}$ изобразитъ самую дробь, а $l\frac{a+x}{a-x}$, или $l(a+x) - l(a-x)$ логариѳмъ ея. Одифференціалимъ теперь это количество, принявъ одно x (*) за перемѣнное, а a за постоянное, и мы получимъ (27) $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$, или по приведеніи $\frac{2adx}{aa-xx}$, или $2adx\,(aa-xx)^{-1}$; и такъ выводя изъ $(aa-xx)^{-1}$ строку (*Алг.* 128), будемъ имѣть $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{и проч.}\right)$;

(*) Хотя сія дробь должна представлять вообще всякую, однако не мѣшаетъ принимать a сумму числителя и знаменателя постояннымъ количествомъ; потому что нѣтъ такой дроби, въ которой бы не можно было сдѣлать чрезъ нѣкоторое приготовленіе сумму числителя и знаменателя равною такому числу, какому угодно. На примѣръ для приведенія дроби $\frac{3}{5}$ въ такое состояніе, чтобъ сумма числителя и знаменателя ея равнялась 12, множу оба члена ея на n, отъ чего выходитъ $\frac{3n}{5n}$; потомъ предположивъ $3n + 5n$ или $8n = 12$, нахожу $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$; слѣд. $\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, въ которой сумма числителя и знаменателя въ самомъ дѣлѣ равна 12.

слѣд. $2adx\,(aa - xx)^{-1} = 2a^{-1}\,dx\,(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} +$ и проч.$) = 2\left(\frac{dx}{a} + \frac{x^2dx}{a^3} + \frac{x^4dx}{a^5} + \frac{x^6dx}{a^7} + \frac{x^8dx}{a^9} +\right.$ и проч.). Слѣд. $\int\frac{2adx}{aa-xx}$, или $l\frac{a+x}{a-x} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} +\right.$ и проч.$) + C$. Что принадлежитъ до постояннаго C, то мы опредѣлимъ величину его, какъ показано выше, разсмотрѣвши, что выходитъ изъ уравненія, когда $x = 0$. Но уравненіе превращается въ такомъ случаѣ въ $l\frac{a}{a} = C$; слѣд. $C = l\frac{a}{a} = l\,1 = 0$; въ сходственность чего получимъ просто $l\frac{a+x}{a-x} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} +\right.$ и проч.). Отсюда явствуетъ, что каждый послѣдующій членъ этой строки состоитъ изъ своего предыдущаго, умноженнаго на квадратъ $\frac{x}{a}$, или на квадратъ перваго члена; слѣд. для опредѣленія всѣхъ членовъ ея, должно взять $\frac{1}{3}$ втораго, $\frac{1}{5}$ третьяго и проч., и удвоить сумму.

Сдѣлаемъ на это нѣсколько примѣровъ. Пусть требуется найти логариѳмъ 2. Въ сходственность изъясненнаго ищу логариѳмъ дроби $\frac{2}{1}$, и получаю $a = 3$, $x = 1$; слѣд. $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, а $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$. Не трудно опредѣлить теперь каждой членъ выведенной выше строки, потому что онъ состоитъ изъ $\frac{1}{9}$ части

предыдущаго; и такЪ сходственными членами для $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^5}$ и проч. будутЪ слѣдующіе.

$\frac{x}{a} = 0{,}333333333$		$\frac{x}{a} = 0{,}333333333$
$\frac{x^3}{a^3} = 0{,}037037037$		$\frac{x^3}{3a^3} = 0{,}012345679$
$\frac{x^5}{a^5} = 0{,}004115226$		$\frac{x^5}{5a^5} = 0{,}000823045$
$\frac{x^7}{a^7} = 0{,}000457247$	слѣд.	$\frac{x^7}{7a^7} = 0{,}000065321$
$\frac{x^9}{a^9} = 0{,}000050805$		$\frac{x^9}{9a^9} = 0{,}000005645$
$\frac{x^{11}}{a^{11}} = 0{,}000005645$		$\frac{x^{11}}{11a^{11}} = 0{,}000000513$
$\frac{x^{13}}{a^{13}} = 0{,}000000627$		$\frac{x^{13}}{13a^{13}} = 0{,}000000048$
$\frac{x^{15}}{a^{15}} = 0{,}000000069$		$\frac{x^{15}}{15a^{15}} = 0{,}000000004$

КоторыхЪ сумма состоитЪ изЪ 0,346573588; эта сумма удвоенная должна принадлежать логариѳму 2. Слѣд. лог. 2 = 0,693147176, или 0,69314718 по принятіи осьми только десятичныхЪ цыфрЪ (потому что за девятую не можно отвѣчать, для этого должно бы еще продлить приближеніе).

Поелику 4 изображаетЪ квадратЪ 2, а 8 кубЪ тогожЪ числа, то удвоенной этотЪ логарифмЪ будетЪ принадлежать логарифму 4, а утроенной 8ми.

Для опредѣленія логариѳма 3, должно бы, какЪ и вЪ предыдущемЪ примѣрѣ показано, вычислить логариѳмЪ дроби $\frac{4}{3}$, потомЪ вычесть этотЪ послѣдній изЪ логариѳма 4, потому что 3 состоитЪ изЪ 4 раз-

дѣленнаго на $\frac{4}{3}$, слѣд. $l3 = l4 - l\frac{4}{3}$. Но можно сыскать его легче другимъ образомъ такъ: вычисли логариѳмъ дроби $\frac{8}{9}$, и вычти его изъ логариѳма 8, которой теперь извѣстенъ, остатокъ будетъ принадлежать логариѳму 9, а половина его 3. Естьли сложишь логариѳмъ 3 съ логариѳмомъ 2, то получишь логариѳмъ 6. Для опредѣленія логариѳма 5 должно сыскать логариѳмъ 10 по предварительному вычисленію логариѳма $\frac{10}{8}$; сей послѣдній сложивъ съ логариѳмомъ 8, получишь въ суммѣ логариѳмъ 10; наконецъ естьли вычтешь изъ этого логариѳмъ 2, то въ остаткѣ выдетъ логариѳмъ 5.

Не трудно теперь понять, какъ должно поступать при исчисленіи всякаго другаго логариѳма. Надобно притомъ замѣтить, что выкладка, по мѣрѣ какъ число увеличивается, становится легче; ибо опредѣливши логариѳмы чиселъ до 10, можно послѣ прочіе до 100 вычислять, употребляя не больше трехъ строчныхъ членовъ; перейдя за 100, довольно двухъ первыхъ членовъ; а отъ 1000 одного только перваго, и такъ и проч.

88. Но чтобъ узнать, какъ приводить эти логариѳмы въ обыкновенные, содержащіеся въ таблицахъ, то должно предварительно имѣть логариѳмъ 10. И такъ вычисливши по предыдущей формулѣ $лог. \frac{10}{8} = 0,22314355$, и сложивъ его съ логариѳмомъ 8, которой выходитъ изъ утроеннаго логариѳма 2, найденнаго выше, получимъ $l10 = 2,30258509$.

Припомнимъ теперь, что уравненіе $dx = \frac{dy}{y}$, на которомъ (21) основали мы настоящее исчисленіе логариѳмовъ, принадлежитъ только такой системѣ, въ которой пред-

полагается *модулюсъ* $= 1$; уравненіе, принадлежащее вообще всякой системѣ логариѳмовъ, есть $dx = \frac{mady}{y}$; а то, которое принадлежитъ всѣмъ системамъ, гдѣ полагается первой членъ a Геометрической прогрессіи равнымъ 1, есть $dx = \frac{mdy}{y}$. Интегралъ перваго, именно $dx = \frac{dy}{y}$, выходитъ $x = ly$; интегралъ втораго, то есть, $dx = \frac{mdy}{y}$, выходитъ $x = mly$. Поелику x изображаетъ логариѳмъ, то должно для приведенія логариѳмовъ, найденныхъ непосредственно выкладкою, въ логариѳмы другой системы такой, гдѣ модулюсомъ служитъ m, умножить ихъ на этотъ модулюсъ. А какъ въ обыкновенныхъ таблицахъ логариѳмъ 10 состоитъ изъ 1, а найденной теперь изъ 2,30258509, то заключимъ, что $m \times 2,30258509 = 1$; слѣд. *модулюсъ* m обыкновенныхъ таблицъ состоитъ изъ $\frac{1}{2,30258509}$, или (по совершеніи дѣленія) изъ 0,43429448.

И такъ *для приведенія трактуемыхъ логариѳмовъ въ обыкновенные логариѳмы таблицъ, должно первые умножить на* 0,43429448. И напротивъ, *для приведенія обыкновенныхъ логариѳмовъ въ настоящіе,*

должно раздѣлить первые на 0,43429448, или проще умножить ихъ на 2,30258509, это будетъ все равно.

И потому, естьли умножишь 0,69314718 логариѳмъ 2, найденной настоящею выкладкою, на 0,43429448; то выдетъ 0,3010300 такой логариѳмъ, какой въ обыкновенныхъ таблицахъ отвѣчаетъ также 2.

89. Естьли по логариѳму захотимъ узнать число, то вотъ какъ должно поступать.

Видѣли мы выше, что по представленіи какого нибудь числа чрезъ $a + x$, выходитъ $l(a + x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4} +$ и проч; слѣд. $l(a+x) - la = l\frac{a+x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ и проч. Хотя a полагается здѣсь произвольнымъ числомъ, однако такимъ, котораго логариѳмъ мало разнится отъ даннаго и принадлежащаго $a + x$. Положимъ для легкости $l\frac{a+x}{a} = z$; въ сходственность чего получимъ $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}$ и проч. Теперь стоитъ только опредѣлить величину $\frac{x}{a}$ въ z.

Положимъ, что эту величину можно изобразить чрезъ $\frac{x}{a} = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ и проч. A, B, C, и проч. представляютъ постоянные коеффиціенты, которые нужно опредѣлить. И такъ найдемъ.

$$
\begin{aligned}
x = Az + Bz^2 &+ Cz^3 + Dz^4 + \text{и проч.} \\
- \frac{A^2}{2} z^2 &- \frac{2AB}{2} z^3 - \frac{BB}{2} z^4 \\
&+ \frac{A^3}{3} z^3 - \frac{2AC}{2} z^4 \\
&\qquad + \frac{3A^2B}{3} z^4 \\
&\qquad - \frac{A^4}{4} z^4.
\end{aligned}
$$

А дабы это уравненіе состоялось, какой бы величины не было z, то должно 1е, чтобъ $A = 1$; 2е, чтобъ сумма членовъ, умножающихъ каждую степень z въ прочихъ столпцахъ, равнялась нулю. Слѣд. по такому предположенію будемъ имѣть $B - \frac{A^2}{2} = 0$, $C - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, $D - \frac{BB}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$; отсюда выходитъ $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$, $D = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$, такъ что допустивъ больше членовъ въ строкѣ, на примѣръ Ez^5, Fz^6 и проч., мы нашли бы $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $F = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ и проч. Слѣд. $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ и проч., и наконецъ $1 + \frac{x}{a}$, или $\frac{a+x}{a} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} \ldots + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ и проч.

Для употребленія этой формулы, должно вычесть изъ даннаго логариѳма (относя его къ $a + x$) ближайшій къ нему извѣстной, котораго число

прими за сходственное съ a; отъ чего произойдетъ $l\frac{a+x}{a}$, или z. Вставь это количество въ предыдущей формулѣ; результатъ покажетъ величину $\frac{a+x}{a}$. А поелику a извѣстно, то не трудно будетъ опредѣлить $a+x$.

На примѣръ желая узнать число, коего логариѳмъ по настоящей системѣ данъ 1, должно предположить $l\frac{a+x}{a}$, или $z = 1$; послѣ чего получимъ $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4}$ + и проч. И такъ искомое число даннаго логариѳма будетъ 2,7182818, ограниченное въ семи десятичныхъ знакахъ.

Мы показали здѣсь способъ находить число, имѣющее логариѳмомъ единицу, большею частію для того, что оно весьма часто употребляется въ выкладкахъ.

Поелику дѣло идетъ теперь о логариѳмахъ, имѣющихъ модулюсомъ единицу, то должно данной логариѳмъ, естьли онъ будетъ принадлежать къ свойству табличныхъ, приводить вмѣстѣ съ логариѳмомъ a, (или приводить только разность ихъ), въ настоящіе логариѳмы по предписанному (88) правилу.

90. Можно еще выразить число посредствомъ логариѳма другимъ образомъ; и какъ способъ такого выраженія довольно употребителенъ, то мы покажемъ его.

Пусть x будетъ значить число, а $lx = z$. Естьли умножу вторую часть уравненія на e такое число, котораго логариѳмъ равенъ 1, то произойдетъ $lx = zle$; равенство отъ этого не уничтожится, по-

тому что $le = 1$. А какъ уравненїе $lx = zle$ по свойству логариѳмовъ перемѣняется въ $lx = le^z$, то вывожу $x = e^z$; ибо когда логариѳмы равны, то и количества, которымъ они принадлежатъ, должны быть также равны.

Но по допущенїи $lx = z$, въ силу изъясненнаго (89) выходитъ $x = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} +$ и проч.; а какъ при томъ и $x = e^z$, то получимъ $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ и проч.

ПРИМѢЧАНІЕ.

91. Способъ, употребленной нами для опредѣленія величины x по уравненію $z = \frac{x}{a} -$ и проч. называется *строчнымъ обратнымъ*. Въ немъ предполагается перемѣнное, котораго хотимъ опредѣлить величину, изображеннымъ такою строкою, въ которой бы другое перемѣнное имѣло показателей, состоящихъ въ Ариѳметической прогрессіи; и гдѣ бы каждой членъ имѣлъ постояннаго коеффиціента, но неопредѣленнаго.

Естьли уравненіе будетъ состоять изъ многихъ членовъ съ x и съ z, однако не умноженныхъ между собою, то должно для

опредѣленія строчныхъ показателей, сдѣлать показателя перваго члена въ одной строкѣ равнымъ самому меньшому показателю перемѣннаго, заключающагося въ уравненіи; потомъ взять за общую разность показателей общаго дѣлителя показателей тогожъ перемѣннаго.

На примѣръ естьли дано будетъ $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^3 +$ и проч. то сдѣлаю $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2 +$ и проч., потому что меньшой показатель количества z состоитъ изъ $\frac{2}{3}$, а общій дѣлитель показателей $\frac{2}{3}$ и 1 тогожъ перемѣннаго z изъ $\frac{1}{3}$.

Когда же количества x и z будутъ умножены между собою, тогда должно поступать по другимъ правиламъ; но мы не намѣрены здѣсь входить въ подробность этихъ правилъ, потому что не имѣемъ въ нихъ нужды для своей цѣли. Способъ рѣшенія такого рода случаевъ можно найти въ сочиненіяхъ Г. Невтона, и въ Крамеровой *Аналитикѣ кривыхъ линей.*

Употребленіе предыдущихъ Приближеній для интеграціи разныхъ количествъ.

92. Поелику таблицы вычеслены на разныя части круга и на логариѳмы, то при интегрованіи дифференціаловъ, относящихся

къ кругу или логариѳмамъ, безполезно приводить ихъ въ строки. Всего нужнѣе теперь изслѣдовать тѣ изъ дифференціаловъ, которые встрѣчаются чаще прочихъ, и показать, какъ по ихъ интеграламъ опредѣляются дуги круговъ или логариѳмы. Вотъ примѣры.

93. Видѣли мы (85), что $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ изображаетъ элементъ дуги круга AM (*Фиг.* 17), которой a служитъ поперешникомъ, а x абсциссою; интегралъ этаго количества, или $\frac{\int \frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ показываетъ выраженіе дуги AM. И такъ положимъ, что требуется сыскать величину сего интеграла для опредѣленной величины x. Вычитаю изъ CA, или $\frac{1}{2}a$ извѣстную величину x или AP, въ остаткѣ выходитъ CP; въ прямоугольномъ треугольникѣ CPM по извѣстнымъ прямому углу, гипотенузѣ $CM = \frac{1}{2}a$ и боку CP, опредѣляю уголъ ACM; но узнавши уголъ ACM, или число градусовъ дуги AM и радіусъ ея CM, не трудно вычислить длину этой дуги (*Геом.* 149).

94. Естьли будетъ данъ такой дифференціалъ $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx-pxx)}}$, въ которомъ h, g, p и k изображаютъ извѣстныя количества; то можно сдѣлать его подобнымъ предыдущему, раздѣливъ сначала какъ числителя, такъ и знаменателя на $\sqrt{p}$, отъ чего про-

изойдетъ $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$, или $\frac{h}{\sqrt{p}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$.

Естьли бы здѣсь множитель количества dx равнялся половинѣ $\frac{gk}{p}$, умножающаго радикальное x, то этотъ дифференціалъ сходствовалъ бы въ точности съ предыдущимъ; и такъ, чтобъ дать ему такой видъ, умножаю и дѣлю вмѣстѣ на $\frac{1}{2}.\frac{gk}{p}$, или $\frac{gk}{2p}$, и получаю

$$\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}}\times\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}},\text{ или }\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}\cdot\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}.$$

Настоящій видъ дифференціала показываетъ, что интегралъ его долженъ относиться къ дугѣ круга, которому діаметромъ служитъ $\frac{gk}{p}$, а абсциссою x, къ дугѣ, говорю, умноженной на $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$. Слѣд. не трудно теперь опредѣлить величину ея по выше означенному способу.

95. Естьли станемъ считать абсциссы не отъ точки A, но отъ центра C, то назвавъ b радіусъ CA круга, а x абсциссу его CP, получимъ $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ элементомъ дуги AM; этотъ дифференціалъ выводимъ изъ сравненія подобныхъ треугольниковъ CPM, Mrm, припомнивъ, что $PM=\sqrt{(bb-xx)}$, и что дифференціалъ дуги AM, поелику она уменьшается по мѣрѣ какъ CP или x увеличивается, долженъ быть отрицательной. И такъ, естьли будетъ

данъ такой дифференціалъ $\frac{kdx}{\sqrt{(gh - pxx)}}$, то переменяю его, какъ прежде въ $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$; но $\frac{gh}{p}$ представляетъ здѣсь bb; слѣд. количество, долженствующее находиться въ числителѣ, и отвѣчающее $-b$, будетъ состоять изъ $-\frac{\sqrt{gh}}{p}$; въ силу чего умножаю и вмѣстѣ дѣлю на $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, и получаю $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$. И такъ принявъ $CA = \frac{gh}{p}$, а $CP = x$, получимъ $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$ интеграломъ даннаго дифференціала, или вообще $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM + C$, или $\frac{-k}{\sqrt{gh}} \times AM + C$. Что принадлежитъ до постояннаго C, то оно опредѣляется по условіямъ вопроса, а дуга AM по показанному (93) способу, то есть, выкладкою прямоугольнаго треугольника CPM и проч.

96. Видѣли мы также (86), что $\frac{aadx}{aa + xx}$ изображаетъ дугу круга, которому a служитъ радіусомъ, а x тангенсомъ, дугу, которую легко можно опре-

дѣлить по извѣстной величинѣ x: ибо естьли въ прямоугольномъ треугольникѣ ACN (фиг. 23) найдешь уголъ ACN, то длина дуги AM опредѣлится по числу градусовъ угла ACN и радїусу a чрезъ тройное правило (Геом. 149).

Естьли дано будетъ $\frac{kdx}{gb^2 + hxx}$, то относя его къ предыдущему выраженїю, раздѣлю числителя и знаменателя на h, и получу $\frac{k}{h} \cdot \frac{dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$; потомъ умноживъ на $\frac{gb^2}{h}$ буду имѣть $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \times \frac{\frac{gb^2}{h} dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, или $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2}{h} dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$. Слѣд. интеграломъ этого дифференцїала будетъ служить длина дуги, имѣющей x тангенсомъ, а $\sqrt{\left(\frac{gb^2}{h}\right)}$ радїусомъ, длина умноженная на $\frac{k}{gb^2}$.

97. И такъ три означенныя дифференцїала интегруются посредствомъ дугъ круга. Теперь посмотримъ на тѣ, коихъ находимъ интегралы по площади круга.

Элементъ полу-отрѣзка APM (фиг. 17) долженъ изобразиться чрезъ $dx \sqrt{(ax-xx)}$, по принятїи AP, x; ибо $y = \sqrt{(ax - xx)}$, а ydx или $PpmM = dx \sqrt{(ax - xx)}$. Слѣд.

всякой дифференціалъ, которой будетъ имѣть такой видъ, или можетъ принять его чрезъ пріуготовленія, сходственныя съ показанными выше, будетъ интегроваться посредствомъ полу-отрѣзка круга, имѣющаго абсциссою x, а радіусомъ a; сей отрѣзокъ опредѣляется или по предыдущимъ способамъ, или по тому, которой означенъ (*Геом.* 149).

98. На примѣръ желая найти площадь эллипсическаго полу-отрѣзка APM (*фиг.* 24), получаемъ $y = \frac{b}{a} \sqrt{(ax - xx)}$; слѣд. ydx, или $d(APM) = \frac{bdx}{a} \cdot \sqrt{(ax - xx)}$; а какъ при томъ $dx \sqrt{(ax - xx)}$ изображаетъ элементъ круговаго полу-отрѣзка APM', по допущеніи круга описаннаго на AB, какъ на діаметрѣ, то $d(APM) = \frac{b}{a} d(APM')$; и слѣд. объинтегралівъ это уравненіе, получимъ $APM = \frac{b}{a} APM'$, изъ котораго выходитъ $APM : APM' = b : a$; т. е. *площадь эллипсическаго полу-отрѣзка содержится къ площади сходственнаго ему полу-отрѣзка круговаго такъ, какъ малая ось къ большой.* Отсюда не трудно заключить, что *площадь цѣлаго эллипсиса къ площади круга, описаннаго на большой оси, содержится какъ меньшая ось къ большой.*

99. Есть ли станемъ щитать абсциссы не отъ точки A (*фиг.* 17), но отъ центра C; то назвавъ CA, b, а CP, x, получимъ $-dx \sqrt{(bb - xx)}$ за элементъ полу-отрѣзка APM, потому что въ этомъ случаѣ $y = \sqrt{(bb - xx)}$, и отрѣзокъ APM уменьшается во время, какъ x увеличивается; слѣд. дифференціалъ APM долженъ быть отрицательной.

Вотъ и примѣръ на дифференціалы такого роду. Положимъ, что требуется найти поверхность продолговатаго эллипсоида. Общая формула, принадлежащая этимъ поверхностямъ, состоитъ изъ $\frac{cy}{r}$ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (74); а какъ эллипсисъ имѣетъ уравненіемъ $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, то $y = \frac{b}{a} \times$ .... $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$, и $dy = -\frac{b}{a} \times \frac{xdx}{\sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}}$; слѣд. $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ превращается въ $\frac{cb}{ra} \times \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$ $\sqrt{\left(dx^2 + \frac{bb}{aa} \times \frac{x^2dx^2}{\frac{1}{4}aa - xx}\right)}$, или по совершеніи означеннаго умноженія, по приведеніи и наконецъ по выставкѣ dx^2 изъ радикала въ $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4 - aaxx + bbxx}{aa}\right)}$; но естьли чрезъ k представимъ разстояніе CF отъ фокуса F (*фиг.* 25), то произойдетъ $kk = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, или $4kk = aa - bb$ (*Алг.* 230), и слѣд. элементъ поверхности обратится въ $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx}{aa}\right)}$, или въ $\frac{cbdx}{raa}\sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx)}$; раздѣливъ радикальную величину на $4kk$ и умноживъ наружную на радиксъ его $2k$, получимъ $\frac{2cbkdx}{raa}$. $\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$ количество, предъ которымъ должно поставить знакъ —, дабы тѣмъ означить, что поверхность начинается отъ точки A; ибо эта поверхность уменьшается по мѣрѣ, какъ x увеличивается; и такъ произойдетъ $-\frac{2cbkdx}{raa}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$. Сравнивъ это количество съ $-dx\sqrt{(bb - xx)}$, которое, какъ мы видѣли выше, служило выраженіемъ круговому полу-отрѣзку,

имѣющему радїусомъ b', мы должны заключить, что интегралъ количества $-dx\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx\right)}$ состоитъ изъ полуотрѣзка круга OPM', котораго полупоперешникъ равенъ $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, а абсциссы x ведутъ свой счетъ отъ центра; интегралъ этотъ, говорю я, равенъ этому сегменту, сложенному съ постояннымъ количествомъ. Слѣд. естьли радїусомъ $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, то есть, радїусомъ, состоящимъ изъ третьей пропорцїональной линеи къ CF и CA, опишешь кругъ ONR, то произойдетъ $\int -dx\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx\right)} = OPM' + C$; слѣд. $\int -\frac{2cbkdx}{raa}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx\right)} = \frac{2cbk}{raa}\times OPM' \ldots + \frac{2cbk}{raa}\times C$.

Опредѣляя постоянное C, должно примѣтить, что искомая поверхность, начинающаяся отъ точки A, должна при этой точкѣ равняться нулю; а какъ при этой же точкѣ A полуотрѣзокъ OPM' обращается въ OAN, то получаемъ $o = \frac{2cbk}{raa}\times OAN + \frac{2cbk}{raa}C$; отсюда выходитъ $C = -OAN$. Слѣд. полный интегралъ состоитъ изъ $\frac{2cbk}{raa}\times OPM' - \frac{2cbk}{raa}\times OAN$, или изъ $\frac{2cbk}{raa}(OPM' - OAN)$, или наконецъ изъ $\frac{2cbk}{raa}(APM'N)$. Слѣд. поверхность полу-эллипсоида будетъ равна $\frac{2cbk}{raa}(ACRN)$, или по причинѣ, что

$CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, и что $\frac{2k}{aa} = \frac{1}{2CO}$, она будетъ равна $\frac{c}{r} \times \frac{b}{2CO} \times ACRN$, или $\frac{c}{r} \times \frac{CD}{CO} \times ACRN$; поверхность же всего эллипсоида состоитъ изъ удвоеннаго этого количества.

Что принадлежитъ до радїуса CO, то способъ опредѣлять его состоитъ въ слѣдующемъ: опиши изъ точки C, какъ изъ центра, радїусомъ CA дугу AL, пересѣкающую въ точкѣ L перпендикуляръ FL, которой поставленъ на CA въ точкѣ F; продолжи CL до тѣхъ поръ, пока она повстрѣчается въ N съ перпендикуляромъ AN, проведеннымъ изъ точки A, чрезъ что получишь CN за искомую величину CO, или $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$; ибо въ подобныхъ треугольникахъ CFL, CAN посылая $CF : CA = CL : CN$, или $k : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : CN$, находимъ $CN = \frac{\frac{1}{4}aa}{k} = CO$.

100. Количества, относящїяся непосредственно къ логариѳмамъ, суть всѣ тѣ, коихъ дифференцїалъ представляетъ или можетъ представлять дробь, въ которой числитель состоитъ изъ дифференцїала своего знаменателя, или изъ того же дифференцїала, умноженнаго или раздѣленнаго на постоянное количество.

Когда числитель представляетъ въ точности дифференцїалъ знаменателя, тогда за интегралъ принимается логариѳмъ самаго знаменателя.

На примѣръ $\int \frac{dx}{x} = lx + C$; $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C$; $\int \frac{2xdx}{aa+xx} = l(aa+xx) + C$.]

Но когда числитель представляетъ дифференціалъ знаменателя, умноженный или раздѣленный на постоянное число, тогда должно раздѣлить этотъ дифференціалъ на два фактора, изъ которыхъ бы одинъ показывалъ дробь, имѣющую въ точности дифференціалъ знаменателя, а другой бы состоялъ изъ постояннаго количества. Въ такомъ случаѣ интеграломъ сего дифференціала будетъ логариѳмъ перемѣннаго знаменателя, умноженный на постояннаго фактора.

На примѣръ желая сыскать интегралъ $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$, я замѣчаю вопервыхъ, что дифференціалъ количества a^3+x^3 есть $3x^2dx$, и потому разбиваю данный дифференціалъ на два фактора такъ $\frac{a}{3} \cdot \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, чтобъ $3x^2dx$ заняло мѣсто знаменателя; слѣд. интегралъ представленнаго такимъ образомъ дифференціала будетъ $\frac{a}{3} \cdot l(a^3+x^3) + C$.

Равномѣрно $\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{1}{-1} \cdot \frac{-1dx}{a-x} = \ldots$; $-l(a-x) + C = 0 - l(a-x) + C = l1 - l(a-x) + C = l\frac{1}{a-x} + C$. Также $\int \frac{xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2xdx}{aa+xx} =$

$\frac{1}{2}l(aa+xx)+C=l\sqrt{(aa+xx)}+C$. НаконецЪ $\int\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n}=$ $\int\frac{a}{bn}\cdot\frac{nbx^{n-1}dx}{k+bx^n}=\frac{a}{bn}\,l(k+bx^n)+C=l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}}$ $+C$.

ВотЪ и примѣрЪ опредѣлять такого рода интегралы вЪ числахЪ. Пусть требуется сыскать величину $l(a+x)$, и положимЪ, что $a=5$, а $x=2$; слѣд. должно сыскать $l\,7$. Пріискиваю вЪ обыкновенныхЪ таблицахЪ логариѳмЪ 7, и нахожу его 0,8450980; умножаю его (88) на 2,30258509, или на 2, 3025851, и получаю 1,9459100, или 1,94591 за величину $l(a+x)$; то есть за величину интеграла $\frac{dx}{a+x}$, по предположеніи $a=5$, а $x=2$.

101. Иногда встрѣчаются такіе дифференціалы, которые можно интегралить прямо по логариѳмамЪ, не разбивая ихЪ подобно предыдущимЪ на факторы; такого роду будетЪ $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$. А дабы вЪ этомЪ успѣть, то должно, глядя по случаямЪ, умножать ихЪ на функцію x такую, чтобЪ произведеніе вывело или чистой дифференціалЪ той же функціи, или умноженный или раздѣленный на постоянное число.

Поступая по сему разсужденію сЪ даннымЪ дифференціаломЪ $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$, умножаю его на $x+\sqrt{(xx-1)}$,

и получаю $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}} + dx$ такое количество, которое представляетъ настоящій дифференціалъ $x + \sqrt{(xx-1)}$. Слѣд. $\int \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} = \int \frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x + \sqrt{(xx-1)}} = l[x + \sqrt{(xx-1)}] + C$.

Равномѣрно сыскивая интегралъ для $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, умножаю числителя и знаменателя его на $\sqrt{(-1)}$, отъ чего происходитъ $\frac{dx\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$; но интегралъ этого дифференціала состоитъ, судя по предыдущему, изъ $\sqrt{(-1)}\, l[x + \sqrt{(xx-1)}] + C$.

102. Мы обѣщались изъяснить (60), почему главное правило интегрованія одночленныхъ дифференціаловъ выводитъ безконечное количество для $\frac{dx}{x}$; а теперь мы видимъ, что этотъ же интегралъ имѣетъ выраженіемъ lx или $lx + C$.

Интегралъ $\frac{dx}{x}$ можетъ быть конечнымъ или безконечнымъ количествомъ, глядя по искомой его части. А чтобъ объяснить это, то замѣтимъ сначала, что брать интегралъ $\frac{dx}{x}$ значитъ квадровать обыкновенную гиперболу, относящуюся къ асимптотамъ своимъ. Въ

самомъ дѣлѣ уравненіемъ этой кривой линеи получаемъ $xy = aa$, или $xy = 1$, предположивъ для легкости $a = 1$. Но какъ изъ уравненія выводимъ $y = \frac{1}{x}$, то элементъ ydx площади обращается въ $\frac{dx}{x}$; и слѣд. интегралъ $\frac{dx}{x}$, или $lx + C$, считая пространства отъ асимптоты AZ (*фиг.* 26), долженъ обратиться въ нуль, когда точка P будетъ упадать въ точку A, или когда $x = o$; слѣд. въ такомъ случаѣ $lo + C = o$, и $C = - lo$. И такъ интегралъ $lx - lo$, или $l\frac{x}{o}$ показываетъ, что пространства $ZAPMV$, заключающіяся между означенною асимптотою и сходственнымъ бокомъ гиперболы, безконечны, и въ этомъ нѣтъ никакого сомнѣнія.

Но естьли положивъ точку O за верхъ гиперболы, (въ какомъ случаѣ сходственная абсцисса съ $AN = 1$), захотимъ считать пространства отъ точки N; то интегралъ $lx + C$ долженъ обратиться въ нуль, когда P упадетъ въ точку N, или когда $x = 1$; слѣд. получимъ $l1 + C = o$, и $C = - l1 = o$; слѣд. $NOMP$ должны изобразиться чрезъ lx.

Отсюда явствуетъ: 1) что логариѳмы, выводимые непосредственно чрезъ вычисленіе, изображаютъ гиперболическія пространства, заключающіяся между асимптотою и самою кривою линеею, и для которыхъ ведемъ счетъ отъ верху O кривой линеи. 2) Что интегралъ $\frac{dx}{x}$, или $x^{-1}dx$, взятой по главному правилу, бываетъ безконечнымъ тогда, когда онъ изображаетъ пространства, считаемыя отъ начала асимптотъ.

Мы не преминемъ въ послѣдствіи показать на самыхъ примѣрахъ интеграцію посредствомъ логариѳмовъ.

О способѣ приводить (естьли только можно) интеграцію даннаго двучленнаго дифференціала въ интеграцію другаго извѣстнаго дифференціала, также двучленнаго.

103. Естьли по надлежащемъ разсмотрѣніи даннаго двучленнаго дифференціала, какъ было показано (68 и 70), можно ли его интегралить, замѣтимъ, что іного сдѣлать не можно; то и тогда не вдругъ надобно прибѣгать къ помощи изъясненныхъ (85 и слѣд.) способовъ приближенія; а изслѣдо-

вать напередъ не льзя ли данной дифференціалъ привести въ другой простѣйшій, коего бы намъ интегралъ по приближенію былъ уже извѣстенъ. Вотъ свойства, по которымъ узнаемъ, можно ли это сдѣлать.

Положимъ, что $ax^m dx\ (b + cx^n)^p$ будетъ данной дифференціалъ, а $ex^r dx\ (b+cx^n)^p$ томъ, въ которой мы хотимъ его привести; оба сіи дифференціалы разнятся между собою одними только коеффиціентами a и e, и показателемъ x внѣ скобокъ; r предполагается меньше m, но имѣетъ одинакой съ нимъ знакъ. Приведеніе перваго дифференціала во второй будетъ возможно тогда, когда $\frac{m-r}{n}$ изобразитъ цѣлое и положительное число. А дабы въ томъ успѣть, то должно предположить $\int ax^m dx\ (b+cx^n)^p = (b+cx^n)^{p+1}$ $(Ax^{m-n+1} + Bx^{m-2n+1} + Cx^{m-3n+1}$ + и проч. $+ Q\int ex^r dx\ (b + cx^n)^p$, заключивъ въ строкѣ Ax^{m-n+1} + и проч. столько членовъ, чтобъ число ихъ превосходило единицею $\frac{m-r}{n}$. Для опредѣленія величины коеффиціентовъ A, B, C и проч. одифференціаль уравненіе, и раздѣливъ его на $(b + cx^n)^p$, перенеси всѣ члены

въ одну часть; потомъ приравняй сумму членовъ, умножающихъ одинакую степень x къ нулю, чрезъ то получишь столько уравненій, сколько находится неизвѣстныхъ A, B, C и проч. Эти уравненія послужатъ къ опредѣленію ихъ.

На примѣръ, естьли будетъ данъ для интеграціи такой дифференціалъ $\frac{x^6 dx}{a^5}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, то судя по изъясненному (68 и 70) примѣчаю, что его не можно интегралить. А какъ видъ количества, заключающагося въ скобкахъ, въ точности сходствуетъ съ тѣмъ, какой служитъ выраженіемъ дуги круга, то разсматриваю, не можетъ ли данное количество зависѣть отъ $adx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, изображающаго дугу круга, котораго радіусъ равенъ a, и абсцисса x принимается отъ центра. Вижу наконецъ, что $\frac{m-r}{n}$ или $\frac{6-0}{2}$ выводитъ цѣлое и положительное число 3; и слѣд. заключаю, что интегралъ даннаго дифференціала зависитъ въ самомъ дѣлѣ отъ подобной дуги круга; слѣд. для выводки этого интеграла предполагаю $\int\frac{x^6 dx}{a^5}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} = (aa-xx)^{\frac{1}{2}}(Ax^5+Bx^3+Cx) + Q\int adx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$

Одифференціаливъ получаю . . . .

$$\frac{x^6 dx}{a^5}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} = \left\{\begin{array}{l}(Ax^5+Bx^3+Cx)\left[-xdx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}\right]\\ +(aa-xx)^{\frac{1}{2}}\,(5Ax^4+3Bx^2+C)\,dx\\ +Qadx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

Дѣлю на $dx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, и нахожу . . . . . . :
$\frac{x^6}{a^5} = -Ax^6 - Bx^4 - Cx^2 + (aa - xx)(5Ax^4 + 3Bx^2 + C) + Qa$:
По совершенїи означеннаго умноженїя, и по перенесенїи всѣхъ членовъ въ одну часть уравненїя, выходитъ

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{a^5}x^6 + Bx^4 + Cx^2 - Qa \\ + Ax^6 + 3Bx^4 + Cx^2 \\ + 5Ax^6 - 5Aa^2x^4 - 3Ba^2x^2 - Ca^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Но поелику надобно суммѣ членовъ, умножающихъ одинакую степень x, какой бы величины оно не было, равняться нулю; то вывожу $6A + \frac{1}{a^5} = 0$ $- 5Aa^2 + 4B = 0$, $2C - 3Ba^2 = 0$, $- Qa - Ca^2 = 0$. Извлекая изъ сихъ уравненїй величины неизвѣстныхъ A, B и проч., нахожу $A = -\frac{1}{6a^5}$, $B = \frac{5}{24a^3}$, $C = \frac{-5}{16a}$, $Q = \frac{5}{16}$ И такъ интеграломъ даннаго дифференцїала $\frac{x^6 dx}{a^5}(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ будетъ . . : $(aa - xx)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^5}{6a^5} - \frac{5x^3}{24a^3} - \frac{5x}{16a}\right) + \frac{5}{16}\int adx$ . . : $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} + C$. А какъ $\int adx\,(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ представляетъ дугу круга, то по извѣстнымъ радїусу a и абсциссѣ x, не трудно теперь опредѣлить весь интагралъ.

104. Естьли разность $m - r$ двухъ показателей, находящихся внѣ скобокъ, раздѣленная на показателя n, заключающагося въ скобкахъ; не произведетъ цѣлаго положительнаго числа; то и тутъ не должно

еще заключать, чтобъ приведенiе даннаго дифференцiала въ другой не возможно было: Надобно напередъ сдѣлавши показателя, заключающагося въ скобкахъ обоихъ дифференцiаловъ отрицательнымъ, посмотрѣть; не можетъ ли разность новыхъ показателей внѣ скобокъ, раздѣленная на показателя, который стоитъ въ скобкахъ, сдѣлать цѣлое положительное число; естьли это случится; то приведенiе должно почитать возможнымъ.

На примѣръ желая узнать, можетъ ли количество $x^{-8}dx\ (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ зависѣть отъ $dx\ (a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$, нахожу, что $\frac{m-r}{n}$ или $\frac{-8-0}{4}$ выводитъ отрицательное число. Однако не заключаю вдругъ объ этихъ дифференцiалахъ, чтобъ они были не зависимы; но пытаюсь перемѣнить ихъ въ $x^{-10}dx$ . . . . . $(a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, и въ $x^{-2}dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$. Теперь примѣчаю, что $\frac{m-r}{n}$ или $\frac{-10+2}{-4}$ даетъ цѣлое и положительное число; слѣд. эти дифференцiалы зависятъ другъ отъ друга.

При интеграцiи даннаго дифференцiала въ этомъ второмъ случаѣ поступай также, какъ и въ предыдущемъ; только сдѣлай напередъ показателя отрицательнымъ.

И такЪ дѣлаю $\int x^{-10} dx\,(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}} = \ldots$
$(a^4x^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}\ (Ax^{-5}+Bx^{-1})+Q\int x^{-2}dx\,(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$
и кончу, какЪ выше, опредѣленіемЪ коеффиціентовЪ A, B, Q.

105. Случается иногда, что данной дифференціалЪ, допускающій самЪ по себѣ интеграцію, будетЪ также относиться по какому нибудь изЪ изъясненныхЪ теперь правилЪ кЪ извѣстному другому; но этотЪ случай можно узнать сверхЪ замѣчаній (68 и 70) еще по коеффиціенту Q другаго дифференціала, вЪ которой приводится данной; ибо коеффиціентЪ Q выходитЪ всегда равенЪ нулю.

На примѣрЪ желая узнать, зависитЪ ли $x^{-4}dx$ $(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$ отЪ $dx\,(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, нахожу это по первому правилу невозможнымЪ; но по второму перемѣнивЪ эти дифференціалы вЪ $x^{-5}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, и $x^{-1}dx\,(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ возможнымЪ, потому что $\frac{m-r}{n}$ или $\frac{-5+1}{-2}$ выводитЪ цѣлое и положительное число; однако дифференціалЪ $x^{-5}dx\,(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ допускаетЪ (68) самЪ по себѣ интеграцію. Почему выходитЪ по видимому противорѣчіе, но оно мнимое; ибо естьли, судя по количеству $\frac{m-r}{n}$, равняющемуся цѣлому числу, станемЪ приводить $x^{-5}dx$

$(aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ въ $x^{-1}dx\ (aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, то должны сдѣлать $\int x^{-5}dx\ (aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}} = (aax^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}\ldots(Ax^{-2}+B)+Q\int x^{-1}dx\ (aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$; опредѣляя же коеффиціенты A, B, Q по вышеозначенному образцу, найдемъ $Q=0$, а это показываетъ, что $\int x^{-5}dx\ (aax^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ есть чисто Алгебраическое количество.

106. Положимъ теперь, что оба двучленныя, заключающіяся въ трактуемыхъ дифференціалахъ, будутъ имѣть разныхъ показателей; на примѣръ пусть данной дифференціалъ будетъ $hx^s dx\ (a+bx^n)^r$, а тотъ, въ которой должно приводить $x^m dx\ (a+bx^n)^p$, p имѣетъ числовую величину меньше r. Естьли r положительное число, то перемѣни дифференціалъ $hx^s dx\ (a+bx^n)^r$ въ слѣдующій другой $hx^s dx\ (a+bx^n)^{r-p} \times (a+bx^n)^p$. Тогда, естьли $r-p$ изображаетъ цѣлое и положительное число, можно представить $hx^s dx\ (a+bx^n)^{r-p}\ (a+bx^n)^p$ строкою членовъ такого виду $(A'x^s+B'x^{s+n}+C'x^{s+2n}+$ и проч.$)\ dx\ (a+bx^n)^p$, изъ которыхъ каждой приводится въ $x^m dx\ (a+bx^n)^p$ по предыдущему способу, когда $s-m$ будетъ дѣлиться безъ остатка на n; а чтобъ привести все въ такой же видъ, то должно поступать въ точности по предписанію того же способа,

взявши за s самаго большаго показателя x въ раскрытой величинѣ $bx^s dx\ (a + bx^n)^{r-p}$.

На примѣръ естьли потребуется $\int x^2 dx\ (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ привести въ $\int I dx\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; то перемѣнивъ $\int x^2 dx\ (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ въ $\int x^2 dx\ (bb - xx)\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, или въ $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, получу 4 величиною количества s. И такъ полагаю въ сходственность объявленнаго способа $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}} (Ax + Bx^3) + \int R dx\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$.

Естьли напротивъ r будетъ количество отрицательное, то приготовь напередъ тотъ дифференціалъ, въ которой надобно привести данной, такимъ образомъ $x^m dx\ (a + bx^n)^{p-r} \times (a + bx^n)^r$; а поелику $p - r$ должно по необходимости представлять положительное число; (ибо количество r предполагаемъ мы отрицательнымъ и больше p, какое бы оно впрочемъ ни было), то допустивъ его также и цѣлымъ, можно привести $x^m dx\ (a + bx^n)^{p-r}\ (a + bx)^n$ въ конечную строку членовъ такъ: $(A' x^m + B' x^{m+n} + C' x^{m+2n}$ + и проч.) $(a + bx^n)^r$. Напослѣдокъ поступай, какъ бы дѣло шло о превращеніи этой строки въ $x^s dx\ (a + bx^n)^r$; именно такъ, какъ предписано было для случая, гдѣ r изображало положительное число.

На примѣръ естьли будетъ дано привести $gx^{-2} dx\ (aa + xx)^{-2}$ въ $dx\ (aa + xx)^{-1}$, или въ $\frac{dx}{aa + xx}$

такой дифференціалЪ, которой интегруется (86) дугою круга, имѣющаго тангенсомЪ x, а радіусомЪ a, то перемѣняю $dx\,(aa + xx)^{-1}$ вЪ $(aa+xx)\,dx\,(aa+xx)^{-2}$; а какЪ самой меньшой показатель внѣ даннаго двучленнаго, состоитЪ изЪ -2, то должно предположить $\int R\,(aa + xx)\,dx\,(aa + xx)^{-2} = (aa + xx)^{-1}$ $(Ax^{-1} + Bx) + \int gx^{-2}dx\,(aa+xx)^{-2}$. Для опредѣленія коеффиціентовЪ поступаю, какЪ было показано выше. НапослѣдокЪ по переставкѣ членовЪ получу величину $\int gx^{-2}dx\,(aa + xx)^{-2}$, вЪ которой . . . $R\,(aa + xx)\,dx\,(aa + xx)^{-2}$ приведу вЪ Rdx . . . $(aa + xx)^{-1}$.

Естьли же $p - r$ не будетЪ цѣлое число, то нѣтЪ надежды сдѣлать приведенія.

О Раціональныхъ Дробяхъ.

107. Всякое дифференціальное раціональное количество можно интегралить или Алгебраически, или по дугамЪ круга, или по логариѳмахЪ, или тремя этими способами вмѣстѣ, или двумя только.

Естьли дифференціальное раціональное количество не будетЪ имѣть перемѣннаго знаменателя, то можно интегралить его всегда Алгебраически, лишь бы этотЪ знаменатель былЪ не одночленное количество; но и тутЪ выключается случай, когда степень знаменателя будетЪ первая, а не другая какая.

Теперь посмотримъ, какъ должно интегралить такой дифференціалъ, въ которомъ знаменатель, заключая въ себѣ перемѣнное, будетъ разнородное раціональное количество.

Мы предполагаемъ въ данной дифференціальной дроби степень перемѣннаго числителя меньше степени знаменателя; когда же этого не случится, то можно привести дробь въ такой видъ, раздѣляя числителя на знаменателя до тѣхъ поръ, пока остаточная степень сдѣлается меньше той, какая находится въ знаменателѣ.

На примѣръ естьли дано будетъ опредѣлить интегралъ для $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$, то вопервыхъ дѣлю x^3dx на $xx+3ax+aa$, и получаю въ частномъ xdx, а въ остаткѣ $-3ax^2dx - aaxdx$. Дѣлю еще остатокъ на тожъ знаменателя, и нахожу въ частномъ $-3adx$, а въ остаткѣ $+8a^2xdx+3a^3dx$. Послѣ чего трактую $xdx-3adx+\frac{8a^2xdx+3a^3dx}{aa+3ax+xx}$ вмѣсто $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$.

Изыскивая способъ интегралить дифференціальныя раціональныя дроби, припомнимъ, что дифференціалъ логариѳма какого нибудь количества состоитъ изъ дифференціала тогожъ количества, раздѣленнаго на самаго его; и потому заключимъ, что интеграція дро-

бей можетъ часто зависѣть отъ логариѳмовъ. Возьмемъ для примѣру количество $2a$ *лог.* $(a + x) - 2a$ *лог.* $(2a + x)$; одифференціаливъ его, получимъ $\frac{2adx}{a+x} - \frac{2adx}{2a+x}$, или по приведеніи къ одному знаменателю $\frac{2aadx}{2aa+3ax+xx}$ Но не трудно понять, что отыскивая интегралъ этой дроби, должно разбить ее на двѣ другія, изъ которыхъ бы одна имѣла знаменателемъ $a + x$, а другая $2a + x$, и въ которыхъ бы числители состояли изъ постоянныхъ чиселъ, умноженныхъ на dx; потомъ обѣ эти дроби интегралить по логариѳмамъ.

108. Отсюда слѣдуетъ заключить, что при изысканіи интеграловъ такого рода дробей, должно стараться разбивать ихъ на столько другихъ простыхъ дробей, сколько знаменатель данной можетъ имѣть въ себѣ факторовъ; каждая изъ послѣднихъ дробей должна имѣть знаменателемъ одного изъ факторовъ. Нужно здѣсь замѣтить, что этотъ способъ употребителенъ тогда только, когда факторы, изъ которыхъ знаменатель данной дроби можетъ состоять, будутъ не одинаковы.

109. Когда же между факторами знаменателя найдутся нѣкоторые равны между собою, тогда не можно надѣяться въ успѣхѣ; потому что интеграція въ такомъ случаѣ зависитъ не отъ однихъ логариѳмовъ.

На примѣръ естьли будетъ данъ такой дифференціалъ $\frac{dx}{(a+x)^2}$, въ которомъ знаменатель имѣетъ двухъ равныхъ факторовъ $a+x$ и $a+x$; то найдемъ (66), что интегралъ этого количества или равнаго ему $dx\,(a+x)^{-2}$ долженъ быть $-(a+x)^{-1}$ $+C$ такой, которой ни мало не зависитъ отъ логариѳмовъ. Но не трудно замѣтить здѣсь также, что ежели одифференціаливъ такое количество, каково на примѣръ $\frac{aa}{a+x}+2a\,l(a+x)+2al(2a+x)$, и получивъ за дифференціалъ его $-\frac{aadx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{a+x}+\frac{2adx}{2a+x}$, или $\frac{(aa+2ax)dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}$, или (по приведеніи къ одному знаменателю) $\frac{4ax^2dx+9a^2xdx+4a^3dx}{(a+x)^2(2a+x)}$, станемъ искать интегралъ его, то увидимъ, что этотъ интегралъ долженъ состоять частію изъ Алгебраическаго и частію изъ логариѳмическихъ количествъ. Слѣд. поворачиваясь къ интегралу этого дифференціала, должно возвратить ему прежній видъ $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2}dx+\frac{2adx}{2a+x}$, то есть, разбить его на двѣ дроби, изъ которыхъ бы первая имѣла знаменателемъ всѣхъ равныхъ факторовъ, а числителемъ всѣ степени x, которыя меньше самой большой сте-

пени знаменателя; а другая имѣла бы знаменателемъ произведенїе разныхъ факторовъ, и не заключала бы въ числителѣ никакой степени x. Тогда членъ ... $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2}dx$ интегруется по предписаннымъ правиламъ, а членъ $\frac{2adx}{2a+x}$ по логариѳмамъ. А поелику можно всегда разбивать рацїональную дробь такимъ образомъ, то мы и будемъ употреблять способъ сей, однако до тѣхъ поръ, пока не будетъ умѣщенныхъ факторовъ въ знаменателѣ; о послѣднемъ случаѣ посудимъ послѣ.

Пусть $\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{M+Nx+Px^2+\ldots\ldots Tx^n}$ будетъ представлять вообще всякую рацїональную дробь; естьли положимъ, что знаменатель этой дроби имѣетъ число m факторовъ равныхъ $x+g$, число p факторовъ равныхъ $x+h$ и проч. и какое нибудь число не одинакихъ факторовъ, изображенныхъ чрезъ $x+i$, $x+q$, $x+r$ и проч., то данная дробь должна въ такомъ случаѣ перемѣниться въ ....

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p\times \text{и проч.}\ (x+i)\ (x+q)\ (x+r)\times \text{и проч.}}$$

И такъ для опредѣленїя интеграла этой дроби должно предположить ....

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p\times \text{и проч.}\ (x+i)\ (x+q)\ (x+r)\times \text{и проч.}}$$

$$=\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx\ \ldots\ldots+Rdx}{(x+g)^m}+$$

$$\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots\ R'dx}{(x+h)^p}\text{ и проч.}+\frac{Ldx}{x+i}$$

$\frac{Mdx}{x+q} + \frac{Ndx}{x+r}$ + и проч. A, B, C и проч. изображаютъ постоянныхъ и неопредѣленныхъ коеффиціентовъ. Естьли по какому нибудь способу опредѣлимъ эти коеффиціенты, то не трудно послѣ сыскать интегралъ. Для простыхъ дробей $\frac{Ldx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$, $\frac{Ndx}{x+r}$ и проч. онъ будетъ состоять изъ $Ll(x+i)$, $Ml(x+q)$, $Nl(x+r)$ и проч. Чтожъ принадлежитъ до дробей $\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx+\ldots Rdx}{(x+g)^m}$, то для способности сдѣлаю $x+g=z$, отъ чего произойдетъ $x=z-g$, и $dx=dz$. По вставкѣ сихъ величинъ, которыя легко обынтегралить, и изъ которыхъ одно будучи такого виду $\frac{dz}{z}$, интегруется по логариѳмамъ. Равномѣрно для членовъ . . . . $\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots R'dx}{(x+h)^p}$ сдѣлаю $x+h=z'$.

Теперь остается намъ разсмотрѣть двѣ вещи: вопервыхъ, какъ находить факторовъ данной дифференціальной дроби; а вовторыхъ какъ опредѣлять неизвѣстные коеффиціенты.

110. Для отысканія факторовъ въ знаменателѣ должно поступать, какъ бы при рѣшеніи такого уравненія, въ которомъ надобно приравнивать знаменателя къ нулю; ибо рѣшить уравненіе (*Алг.* 143) значитъ отыскать всѣхъ двучленныхъ факторовъ, изъ коихъ оно вышло.

111. Что касается до опредѣленія коеффиціентовъ A, B, C, то должно привести къ одному знаменателю всѣ дроби, въ которыхъ эти коеффиціенты заключаются; послѣ чего уничтоживъ въ обѣихъ частяхъ уравненія, состоящаго изъ данной дроби и найденныхъ новыхъ, общаго знаменателя, и переставивъ всѣ члены въ одну часть, должно не смотря на величину x, сумму членовъ, умножающихъ одинакую степень x, приравнять къ нулю. По такому допущенію получимъ столько уравненій, сколько находится неизвѣстныхъ коеффиціентовъ; эти уравненія послужатъ къ опредѣленію ихъ. Вотъ и примѣры.

Предложимъ сыскать интегралъ для .... $\frac{dx}{aa-xx}$; вопервыхъ дѣлаю $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{Adx}{a+x} + \frac{Bdx}{a-x}$, потому что знаменатель $aa-xx$ состоитъ изъ двухъ факторовъ $a+x$ и $a-x$. Потомъ привожу къ одному знаменателю и получаю $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{(Aa - Ax + Ba + Bx)dx}{aa-xx}$; по уничтоженіи общаго знаменателя, по раздѣленіи на dx и по переноскѣ всѣхъ членовъ въ одну часть, нахожу ....

$\left\{ \begin{matrix} 1 + Ax \\ - Aa - Bx \\ - Ba \end{matrix} \right\} = 0$; слѣд. $1 - Aa - Ba = 0$, и $A =$

$B = o$; отсюда заключаю, что $A = \frac{1}{2a}$, и $B = \frac{1}{2a}$; и такъ уравненіе превращается въ $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{2a}dx}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}dx}{a - x}$, котораго интегралъ будетъ $\int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} l (a + x) \ldots\ldots$ $- \frac{1}{2a} l (a - x) + C = \frac{1}{2a} l \frac{a + x}{a - x} + C$.

Предложимъ вторымъ примѣромъ дробь $\frac{4axx + 9a^2x + 4a^3}{(a + x)^2 (2a + x)} dx$, выведенную нами (109) изъ дифференціаціи $\frac{aa}{a + x} + 2al (a + x) + 2al (2a + x)$. Дѣлаю $\frac{4axx + 9a^2x + 4a^3}{(a + x)^2 (2a + x)} dx = \frac{Ax + B}{(a + x)^2} dx + \frac{C dx}{2a + x}$; привожу къ одинакому знаменателю и получаю (по уничтоженіи общаго знаменателя, по раздѣленіи на dx и по переноскѣ всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія)

$$\left.\begin{array}{llll} 4ax^2 & + 9a^2x & + 4a^3 \\ - Ax^2 & - 2Aax & - 2Ba \\ - Cx^2 & - Bx & - Caa \\ & - 2aCx & \end{array}\right\} = 0$$

Слѣд. по уравненіямъ $4a - A - C = o$, $9a^2 - 2Aa - B - 2aC = o$, $4a^3 - 2Ba - Caa = o$, нахожу $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$.

И такъ данной дифференціалъ превращается въ $\frac{2ax + aa}{(a+x)^2}dx + \frac{2adx}{2a+x}$. Послѣдній членъ имѣетъ интеграломъ $2a$ *лог.* $(2a+x)$. Что касается до перваго, то дѣлаю $a+x = z$, и получаю $x = z - a$, а $dx = dz$. Вставливаю величины сіи въ $\frac{2ax + aa}{(a+x)^2}dx$, и нахожу $\frac{2az - aa}{zz}dz$, или $\frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{zz}$, коего интегралъ есть $2a$ *лог.* $z + \frac{aa}{z}$, или $2al\,(a+x) + \frac{aa}{a+x}$; слѣд. цѣлой интегралъ будетъ $\frac{aa}{a+x} + 2a$ *лог.* $(a+x) + 2a$ *лог.* $(2a+x)$ таковъ, каковъ въ самомъ дѣлѣ долженъ быть.

112. Хотя этотъ способъ опредѣлять коеффиціенты почитается общимъ; однако можно находить ихъ еще и другими. На примѣръ можно находить коеффиціенты простыхъ дробей, не дѣлая ихъ зависимыми между собою, такъ. Положимъ, что $\frac{Ndx}{M}$ представляетъ данную дробь, $hx + a$ одного изъ факторовъ знаменателя, а P частное изъ M раздѣленнаго на $hx + a$. Раздѣлимъ теперь $\frac{Ndx}{M}$ на двѣ части $\frac{Adx}{hx+a}$ и

$\frac{Qdx}{P}$, чрезъ то получимъ $\frac{Ndx}{M} = \frac{Adx}{hx+a} + \frac{Qdx}{P}$, или $\frac{N}{M} = \frac{A}{hx+a} + \frac{Q}{P}$; по приведеніи членовъ этого уравненія къ одному знаменателю, и обративъ притомъ вниманіе на предположеніе $P = \frac{M}{hx+a}$, или $P \times (hx+a) = M$, получимъ $N = AP + Q(hx+a)$. Естьли одифференціалимъ уравненіе $(hx+a)P = M$, то выдетъ $hPdx + (hx+a)dP = dM$. Но поелику это уравненіе, равно какъ и $N = AP + Q(hx+a)$ должны состояться всегда, какой бы величины x ни было, то принявъ за x такую, какая выходитъ въ самомъ простомъ результатѣ; то есть, принявъ за x величину $-\frac{a}{h}$, какая выходитъ по предположеніи знаменателя $hx+a=0$, получимъ $hpdx = dM$, и $N = AP$. Вставивъ во второмъ изъ этихъ послѣднихъ уравненій величину $P = \frac{dM}{hdx}$, выведенную изъ перваго, найдемъ $A = \frac{hNdx}{dM}$; слѣд. для опредѣленія коеффиціента A какой нибудь простой дроби, должно раздѣлить числителя ея Ndx на дифференціалъ dM знаменателя ея, и вставивъ вмѣсто x величину, какая

выдетъ послѣ приравненія къ нулю знаменателя простой дроби, умножить все на коеффиціентъ x.

На примѣръ для опредѣленія коеффиціентовъ A и B дробей $\frac{Adx}{a+x}$ и $\frac{Bdx}{a-x}$, на которыя разбили мы выше дробь $\frac{dx}{aa-xx}$, дифференціалю знаменателя $aa - xx$, и нахожу $-2xdx$. Дѣлю числителя dx данной дроби на $-2xdx$, и нахожу въ частномъ $-\frac{1}{2x}$; вставливаю въ этомъ частномъ вмѣсто x величины его $-a$ и a, (которыя выходятъ изъ приравненія къ нулю знаменателей $a+x$ и $a-x$ частныхъ дробей), и умноживъ потомъ на 1 и -1 величины h, получаю $\frac{1}{2a}$ и $\frac{1}{2a}$ величинами A и B точно такія же, какія найдены были прежде.

113. Хотя изъясненныя выше правила для интеграціи раціональныхъ дробей служатъ вообще; однако естьли нѣкоторые изъ факторовъ знаменателя будутъ количества умственныя, а самъ интегралъ настоящій, то для приведенія его въ такое состояніе, должно извлечь сначала изъ знаменателя всѣхъ настоящихъ факторовъ; потомъ разбить остатокъ на другіе, только не первой, а второй степени, эти послѣдніе факторы будутъ

представлять всегда настоящія количества. Тогда для каждаго фактора второй степени, которой можно всегда изобразить чрезъ ax^2+bx+c, составь дробь такого виду $\frac{Axdx+Bdx}{ax^2+bx+c}$ и определи коеффиціенты по предыдущему способу.

На примѣръ желая обынтегралить дробь $\frac{a^4dx}{a^3-x^3}$, найдемъ вопервыхъ, приравнявъ къ нулю знаменателя a^3-x^3, что $a-x$ будетъ представлять одного изъ факторовъ его; потомъ раздѣливъ a^3-x^3 на $a-x$, получимъ въ частномъ a^2+ax+x^2 количество, содежащее въ себѣ двухъ другихъ факторовъ. Однако естьли это количество приравняемъ къ нулю, то опредѣляя двухъ прочихъ факторовъ, найдемъ ихъ умственными. И такъ не разбивая данное количество на три дроби, которыя бы имѣли знаменателями трехъ факторовъ знаменателя a^3-x^3, раздѣлю ее только на двѣ, изъ которыхъ одной припишу знаменателемъ фактора $a-x$, а другой фактора a^2+ax+x^2; въ сходственность чего дѣлаю $\frac{a^4dx}{a^3-x^3}=\frac{Adx}{a-x}+\frac{Bxdx+Cdx}{aa+ax+xx}$. Привожу къ одинакому знаменателю, дѣлю на dx, и получаю по переноскѣ всѣхъ членовъ въ одну часть . . . . :

$$\left.\begin{matrix} a^4 & -Aax & -Ax^2 \\ -Aa^2 & +Cx & +Bx^2 \\ -Ca & -Bax & \end{matrix}\right\} = 0$$

Приравниваю къ нулю сумму всѣхъ членовъ, умножающихъ одинакую степень x, и вывожу $B-A=0$, $C-Aa-Ba=0$, $a^4-Aa^2-Ca=0$ уравненія, по которымъ опредѣляю $A=\frac{a^2}{3}$, $B=\frac{a^2}{3}$, $C=$

$\frac{2a^3}{3}$. Слѣд. $\frac{a^4dx}{a^3 - x^3} = \frac{\frac{a^2}{3}dx}{a - x} + \frac{\frac{a^2}{3}xdx + \frac{2a^3}{3}dx}{a^2 + 2ax + xx}$. Интегралъ первой дроби во второй части уравненія опредѣляется по вышеозначенному правилу; чтожъ принадлежитъ до интеграла второй дроби, то онъ находится по слѣдующему замѣчанію.

114. Естьли между факторами второй степени случатся нѣкоторые равны между собою, то должно для нихъ составить такую дробь $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots Qdx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, количество n означаетъ число равныхъ факторовъ $ax^2 + bx + c$.

На примѣръ естьли дано будетъ обынтегралить $\frac{x^4 + 5ax^3 + 4a^3x}{(aa + ax + xx)(x^3 - a^3)}dx$, то найдемъ знаменателя способнымъ раздѣлиться на три такія фактора $x - a$, $x^2 + ax + a^2$ и $x^2 + ax + a^2$. Не разбивая двухъ послѣднихъ на другіе простые, которые должны быть умственными, стану трактовать ихъ, какъ они найдены; а какъ они равны между собою, то не ставлю ихъ знаменателями подъ двумя дробями, но беру произведеніе ихъ $(a^2 + ax + x^2)^2$, и дѣлаю его знаменателемъ одной дроби, въ числителѣ которой ввожу всѣ степени x, какія только будутъ ниже самой большой знаменателя, то есть, всѣ степени x ниже x^4. И такъ дѣлаю $\frac{x^4 + 5ax^3 + 4a^3x}{(a^2 + ax + xx)(x^3 - a^3)} = \frac{Adx}{x - a} \ldots$ $+ \frac{Bx^3dx + Cx^2dx + Dxdx + Edx}{(aa + ax + xx)^2}$; опредѣляю коеффиціен-

ты по предыдущимЪ правиламЪ; потомЪ интегралю, какЪ слѣдуетЪ.

115. И такЪ остается намЪ узнать, какЪ должно интегралить количества такого рода. Посмотримъ на первое, именно на $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$.

Привожу это количество для легкости вЪ $\frac{A'xdx + B'dx}{x^2 + a'x + b'}$, раздѣливЪ числителя и знаменателя на a.

ПотомЪ уничтожаю второй членЪ знаменателя, положивЪ $x + \frac{1}{2}a' = z$, отЪ чего выходитЪ $x = z - \frac{1}{2}a'$, а $dx = dz$; вставивЪ эти величины получимЪ количество вЪ такомЪ видѣ $\frac{Czdz + Ddz}{zz + qq}$, котораго первая часть $\frac{Czdz}{zz + qq}$ интегруется по логариѳмамЪ (99), а другая посредствомЪ дуги круга, имѣющаго радіусомЪ q, а тангенсомЪ z.

Что принадлежитЪ до количествЪ такого вида $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots Qdx}{(x^2 + ax + b)^n}$, то должно равнымЪ образомЪ уничтожить второй членЪ знаменателя; послѣ чего оно пре-

вратится въ $\frac{Mz^{2n-1}dz + Nz^{2n-2}dz + \ldots . Tdz}{(zz+qq)^n}$;
но для интеграціи этого послѣдняго количества должно привести интегралъ суммы тѣхъ членовъ, въ которыхъ z будетъ имѣть парныхъ показателей, въ $\frac{dz}{zz+qq}$ по предписанному (103) правилу; тѣ же члены, которые будутъ съ нечотными показателями, должно интегралить (68).

И такъ интеграція всякой раціональной дроби производится или сама по себѣ, или зависитъ отъ дугъ круга и логариѳмовъ.

О нѣкоторыхъ Превращеніяхъ, облегчающихъ интеграцію.

116. Не можно предписать общихъ правилъ на превращенія такого рода. Разсматриваніе количествъ, употребленіе и опытъ научаютъ насъ, что должно дѣлать въ каждомъ случаѣ.

Мы имѣемъ предметомъ въ этихъ превращеніяхъ приводить данные дифференціалы въ раціональныя, которыхъ интеграція изъ предыдущаго уже извѣстна. Вотъ нѣкоторыя замѣчанія.

117. Естьли въ данномъ дифференціалѣ радикальныя количества будутъ одночленныя, то сдѣлай сначала показателей дробными, и приведи ихъ въ одинакому знаменателю. Потомъ положивъ, что $x^{\frac{k}{l}}$ представляетъ одно изъ количествъ, такимъ образомъ приготовленныхъ, сдѣлай $x^{\frac{1}{l}} = z$, отъ чего произойдетъ $x = z^l$, а $dx = lz^{l-1}\,dz$.

Вставь эти величины въ данной дифференціалъ; по вставкѣ получишь раціональное количество.

На примѣръ слѣдующій дифференціалъ .... $\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$ напишу напередъ такъ $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$, потомъ перемѣню его въ $\frac{x^{\frac{3}{6}}\,dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$. Дѣлаю $x^{\frac{1}{6}} = z$, и нахожу $x = z^6$, а $dx = 6z^5dz$; слѣд. по вставкѣ выходитъ $\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3}$, или по раздѣленіи на z^3, $\frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$; но это количество не трудно обынтегралить по правиламъ раціональныхъ дробей.

118. Всякое количество, заключающее въ себѣ не больше одного разнороднаго радикала, такого притомъ, которой бы вмѣстѣ съ сво-

имъ перемѣннымъ не превосходилъ второй степени, можно сдѣлать всегда раціональнымъ двумя способами: 1. приравнявъ радикальное количество къ его же перемѣнному, усугубленному или уменьшенному другимъ перемѣннымъ; 2. или разбивъ количество, предъ которымъ стоитъ радикалъ на два фактора, и приравнявъ его потомъ къ одному изъ факторовъ, умноженному на новое перемѣнное.

На примѣръ естьли будетъ данъ такой дифференціалъ $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$; то могу сдѣлать $\sqrt{(xx-aa)} = x-z$, и получу $x = \frac{zz+aa}{2z}$. Слѣд. $dx = \ldots \frac{(zz-aa)\,dz}{2zz}$, а $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{aa-zz}{2z} = \ldots\ldots -\frac{(zz-aa)}{2z}$; по вставкѣ этихъ величинъ нахожу $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = -\frac{dz}{z}$ количество, которое можно интегралить.

Могу въ этомъ же примѣрѣ сдѣлать $\sqrt{(xx-aa)}$, или $\sqrt{[(x-a)(x+a)]} = (x-a)z$; потомъ составивъ изъ обѣихъ частей уравненія квадраты, и раздѣливъ на $x-a$, найду $x+a = (x-a)zz$, или $x = \frac{a+azz}{zz-1}$; слѣд. $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{2az}{zz-1}$, а $dx = \frac{-4azdz}{(zz-1)^2}$; слѣд. $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{-2dz}{zz-1}$ такому ко-

личеству, которое интегралится по правиламЪ раціональныхЪ дробей.

Можно эти два способа употребить для спрямленія параболы, которой элементЪ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ состоитЪ изЪ $\sqrt{\left(dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{p^2}\right)}$, или изЪ $dy\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)}$ Освободи вопервыхЪ y^2 отЪ коеффиціента, изобразивЪ такЪ $\frac{2dy}{p}\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)}$, и потомЪ сдѣлай . . . $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)} = y + z$.

119. Естьли вЪ радикальномЪ количествѣ не будетЪ находиться втораго члена, то можно приравнять его кЪ новому перемѣнному, умноженному на перемѣнное даннаго радикала.

На примѣрЪ вЪ количествѣ $\frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, могу сдѣлать $\sqrt{(aa - xx)} = xz$. Когда же случится и второй членЪ, то умноживЪ его, буду поступать также.

120. НаконецЪ можно для раціональности количествЪ приравнивать самое перемѣнное, или какую нибудь функцію перемѣннаго кЪ новому перемѣнному или кЪ функціи его, оставивЪ нѣчто неопредѣленнымЪ для предполагаемой цѣли.

На примѣрЪ желая узнать, вЪ какомЪ случаѣ можно сдѣлать раціональнымЪ количество $x^m dx\,(a + bx^n)^p$, дѣлаю $(a + bx^n)^p = z^q$, q изображаетЪ здѣсь неопре-

дѣленное. По правиламъ рѣшенія уравненій нахожу

$$a + bx^n = z^{\frac{q}{p}}; \quad x^n = \frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}; \; x = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}; \; dx = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} - 1} dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1};$$

слѣд. $x^m dx \, (a + bx^n)^p = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} + q - 1} dz \ldots$

$$\left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1}$$

; но послѣднее количество можно интегралить всегда, какой бы величины q не было, лишь бы $\frac{m+1}{n} - 1$ равнялось цѣлому и положительному числу, или нулю; а чтобъ сдѣлать его раціональнымъ и тогда, когда $\frac{m+1}{n} - 1$ будетъ представлять цѣлое и отрицательное число, то должно положить $q = p$. Естьли p будетъ имѣть величиною $\pm \frac{k}{2}$, (k означаетъ цѣлое нечетное число), то должно подвести этотъ случай подъ правило (118), и сдѣлать $q = k$, когда $\frac{m+1}{n}$ будетъ имѣть величиною $\pm \frac{k'}{2}$, въ которой k' изображаетъ также цѣлое нечетное число.

121. Мы не намѣрены распространяться больше объ этой матеріи, а скажемъ только, что весьма не рѣдко успѣваемъ въ ин-

теграціи нѣкоторыхъ дифференціаловъ, приравнивая перемѣнное къ такой дроби, какова $\frac{1}{z}$.

На примѣръ въ слѣдующемъ количествѣ . . . $\frac{x^{15}dx + adx}{x^{10} + x^{18}}$, сдѣлавъ $x = \frac{1}{z}$ получу $\frac{-z^3dz - az^{18}dz}{1 + zz}$, которое помощію дѣленія представлю одночленною строкою въ видѣ $\frac{Adz}{1+zz}$ такого количества, которое знаемъ уже интегралить.

Объ интеграціи Показательныхъ количествъ.

122. Не можно предписать на интеграцію количествъ такого рода, кромѣ одного правила; именно, должно стараться разбивать ихъ на два фактора, изъ которыхъ бы одинъ представлялъ дифференціалъ логариѳма другаго, или бы состоялъ изъ постоянной его части (28); потомъ дѣлить все на дифференціалъ логариѳма втораго фактора.

И такъ заключаю, что $x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)$ можно интегралить, потому что факторъ $dylx + \frac{ydx}{x}$ состоитъ изъ дифференціала ylx представляющаго логариѳмъ x^y; слѣд. интеграломъ даннаго дифференціала получаю $\frac{x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)}{d(lx^y)} + C$; то есть

$x^y \frac{\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)}{dylx + \frac{ydx}{x}} + C$, или $x^y + C$. Равномѣрно примѣчаю, что dxe^{ax} можно интегралить; ибо dx есть дифференціалъ логариѳма e^{ax}, раздѣленный на постоянное. Слѣд. получаю $\int dxe^{ax} = \frac{dxe^{ax}}{adxle} = \frac{e^{ax}}{ale}$. Естьли e будетъ такое число, котораго логариѳмъ равенъ 1, то предписанное правило обращается въ другое, въ силу котораго должно раздѣлить данной дифференціалъ на дифференціалъ показателя e.

Естьли дано будетъ такое количество $x^m dxe^{ax}$, въ которомъ число e имѣетъ логариѳмъ 1; то можно его интегралить, когда m изображаетъ цѣлое положительное число, сдѣлавъ $\int x^m dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} +$ и проч. $+ k)$. На примѣръ въ количествѣ $x^2 dxe^{ax}$ полагаю $\int xdxe^{ax} = e^{ax}(Ax^2 + Bx + E)$. Одифференціаливъ его (28), и раздѣливъ потомъ на dxe^{ax}, нахожу $x^2 = \left\{\begin{matrix} Aax^2 + aBx + aE \\ + 2Ax + B \end{matrix}\right\}$; слѣд. $Aa = 1$, $aB + 2a = 0$, $aE + B = 0$; то есть, $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{-2}{aa}$, $E = \frac{2}{a^3}$; слѣд. $\int x^2 dxe^{ax} = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$.

Можно съ великою удачею употреблять число e, коего логариѳмъ равенъ 1, для интеграціи многихъ количествъ, а особливо когда онѣ заключаютъ въ себѣ логариѳмы.

На примѣръ желая обынтегралить $x^n dx\,(lx)^m$, дѣлаю $lx = ez = zle$; слѣд. $x = e^z$, $dx = dze^z$; и слѣд. $x^n dx\,(lx)^m = z^m dze^{(n+1)z}$, но это количество интегруется по предыдущему способу.

Объ интеграціи Количествъ съ двумя и съ большимъ числомъ Перемѣнныхъ.

123. Припомнивъ правило, предписанное для опредѣленія дифференціаловъ количествъ, заключающихъ въ себѣ многія перемѣнныя, увидимъ, что для интеграціи дифференціаловъ со многими перемѣнными (такихъ однакожъ, которые могутъ допустить ее), должно совокупить всѣ члены, сопряженные съ одинакимъ перемѣннымъ, и интегралить ихъ, какъ бы въ нихъ кромѣ того перемѣннаго не было другаго, то есть, какъ бы всѣ прочіе члены были постоянныя количества. Потомъ, естьли одифференціаливъ найденный такимъ образомъ интегралъ, принимая въ особенности каждое перемѣнное, вычтешь новой этотъ дифференціалъ изъ даннаго, и остатка не будетъ, то найденной интегралъ почитать (съ присовокупленіемъ къ нему постояннаго) за настоящій. Когдажъ будетъ остатокъ, которой не долженъ содержать въ себѣ больше перемѣннаго, по которому произведена интеграція, то поступай съ

нимъ также; и такъ далѣе относительно къ каждому перемѣнному.

На примѣръ естьли дано будетъ такое количество $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$; то взявъ два члена, сопряженные съ dx, именно $3x^2ydx + y^5dx$, интегралю ихъ, принимая y за постоянное, и нахожу интеграломъ $x^3y + y^5x$. А какъ по вычитанïи дифференцïала этого количества, найденнаго по x и y, изъ даннаго дифференцïала, не выходитъ никакого остатка, то почитаю $x^3y + y^5x + C$ настоящимъ интеграломъ.

Желая обынтегралить $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$, беру одни члены, сопряженные съ dx, и принимая y и z за постоянныя, нахожу интеграломъ $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Но какъ по вычитанïи дифференцïала этого количества, найденнаго по всѣмъ перемѣннымъ x, y и z, изъ даннаго дифференцïала, въ остаткѣ выходитъ y^2dy, то прïискавъ интегралъ для сего остатка, которой есть $\frac{y^3}{3}$, и сложивъ его съ прежде найденнымъ, получаю (съ присовокупленïемъ постояннаго) $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$ за цѣлый интегралъ.

124. Поелику не всѣ дифференцïалы со многими перемѣнными допускаютъ интеграцïю, то постараемся замѣтить тѣ, которые допускаютъ оную.

125. Чтобъ узнать, можно ли интегралить данной дифференцïалъ, должно на-

блюдать слѣдующее: естьли въ количествѣ Q, взятомъ произвольно за сумму двухъ другихъ x и y, вставивъ сначала вмѣсто x какое нибудь количество p, потомъ въ результатѣ вмѣсто y количество q, получишь тожъ самое, какъ бы ты сначала вставилъ q за y, потомъ p за x; то это будетъ знакъ, что данное количество допускаетъ интеграцію.

126. Отсюда слѣдуетъ, что естьли одифференціалишь какое нибудь количество Q, состоящее изъ x, y и постоянныхъ, принявъ сначала одно x перемѣннымъ, потомъ одифференціалишь результатъ этотъ допуская одно y перемѣннымъ; то должно произойти томужъ самому, какъ бы ты сначала одифференціалилъ по буквѣ y, потомъ результатъ по x.

Въ самомъ дѣлѣ по допущеніи вставки $x + dx$ вмѣсто x, Q должно обратиться въ Q'; и слѣд. $Q' - Q$ получимъ дифференціаломъ. Естьли же вставимъ въ этомъ дифференціалѣ $y + dy$ за y, то Q' превратится въ Q'', а Q въ Q'''; слѣд. $Q' - Q$ сдѣлается $= Q'' - Q'''$, и слѣд. количество $Q'' - Q''' - Q' + Q$ будетъ вторымъ дифференціаломъ.

Сдѣлаемъ теперь вставки сіи на оборотъ. Поелику по вставкѣ $y + dy$ за y въ сложномъ количествѣ Q, оно обращается въ Q'''; слѣд. $Q''' - Q$ выходитъ первымъ дифференціаломъ, когда y примемъ перемѣннымъ. Потомъ естьли вставимъ $x + dx$ вмѣсто x въ найденномъ количествѣ, то Q

должно перемѣниться, какъ явствуетъ изъ предыдущаго, въ Q', а Q''' (125) въ Q''; такимъ образомъ $Q''' - Q$ будетъ равно $Q'' - Q'$, и слѣд. вторымъ дифференціаломъ выходитъ также, какой выше $Q'' - Q' - Q''' + Q$.

И такъ заключимъ, что естьли A представляетъ количество, сложное изъ x и y, то $\frac{dA}{dy}dy$ будетъ означать дифференціалъ A по буквѣ y, а $\frac{dA}{dx}dx$ дифференціалъ A по x. Равномѣрно $\frac{ddA}{dxdy}dxdy$ будетъ означать такой дифференціалъ, которой сначала найденъ по перемѣнному x, а потомъ по y.

127. Выразумѣвъ все это, положимъ, что $Adx + Bdy$ представляетъ совершенной дифференціалъ, а M интегралъ его. Слѣд. получимъ $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = Adx + Bdy$, $\frac{dM}{dx} = A$, $\frac{dM}{dy} = B$; также $\frac{ddM}{dxdy}dy = \ldots$ $\frac{dA}{dy}dy$, и $\frac{ddMdx}{dydx} = \frac{dBdx}{dx}$, или $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, и $\frac{ddM}{dydx} = \frac{dB}{dx}$; а какъ доказано (126), что $\frac{ddMdxdy}{dxdy} = \frac{ddMdydx}{dydx}$, то и $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{ddM}{dydx}$, и слѣд. $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; то есть, естьли $Adx + Bdy$ изображаетъ полный дифференціалъ, то дифференціалъ A, взятой по одному перемѣнному y и раздѣ-

левиой на dy, долженЪ равняться дифференціалу B, взятому по x и раздѣленному на dx.

И такЪ вЪ силу изЪясненнаго заключаю, что $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ изображаетЪ полной дифференціалЪ, потому что $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$; вЪ самомЪ дѣлѣ первой членЪ можно привести вЪ $\frac{y^2dy}{dy}$, а второй вЪ $\frac{y^2dx}{dx}$. НапротивЪ же примѣчаю, что $xydx + 2xdy$ не допускаетЪ интеграціи, потому что $\frac{d(xy)}{dy}$ не равно $\frac{d(2x)}{dx}$.

128. Естьли вЪ данномЪ дифференціалѣ случится больше двухЪ перемѣнныхЪ, на примѣрЪ естьли онЪ будетЪ такого виду $Adx + Bdy + Cdz$, то должно, когда онЪ допускаетЪ интеграцію, чтобЪ $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Ибо можно принимать попеременно z, y и x постоянными; слѣд. дифференціалЪ вЪ такомЪ случаѣ будетЪ состоять изЪ двухЪ только членовЪ (потому что по такому допущенію выходитЪ или $dz = o$, или $dy = o$, или $dx = o$), и долженЪ быть полнымЪ, естьли самЪ данной будетЪ такимЪ; онЪ долженЪ притомЪ вЪ

каждомъ изъ сихъ случаевъ имѣть свойства совершенныхъ дифференціаловъ съ двумя перемѣнными.

Не трудно послѣ сего находить правила для прочихъ дифференціаловъ съ большимъ числомъ перемѣнныхъ.

О Дифференціальныхъ Уравненіяхъ.

129. Когда данное дифференціальное уравненіе будетъ заключать въ себѣ не больше двухъ перемѣнныхъ x и y, и притомъ одна его часть будетъ состоять изъ однихъ x и dx, а другая изъ y и dy; тогда интеграція производится для каждой части особливо по правиламъ, которыя были предписаны для дифференціаловъ съ однимъ перемѣннымъ.

На примѣръ естьли будетъ дано такое $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, которое можетъ вообще представлять всякое дифференціальное уравненіе о двухъ членахъ; то раздѣливъ его на y^n и x^r получимъ $ax^{m-r}dx = by^{q-n}\,dy$, коего интегралъ будетъ $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \ldots \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

130. А какъ можетъ случиться, что какая нибудь часть уравненія, или обѣ вмѣстѣ немогутъ интегралиться Алгебраически, хотя уравненіе само по себѣ будетъ Алгебраическое, или по крайней мѣрѣ можно

привести его въ такой видъ; то небезполезно разсмотрѣть здѣсь нѣкоторые случаи къ этому предмету относящіеся.

На примѣръ естьли бы въ предыдущемъ уравненіи $m-r=-1$, и $q-n=-1$, то дифференціальное уравненіе должно бы изобразиться чрезъ $\frac{adx}{x}=\frac{bdy}{y}$, коего интегралъ не иначе можно получить для каждой части, какъ по логариѳмамъ; такъ что $alx=bly+lC$. (*) Но это уравненіе можно сдѣлать Алгебраическимъ, написавъ его такъ $lx^a=ly^b+lC$, или $lx^a=lCy^b$; а какъ оба эти логариѳма равны между собою, то и количества, къ которымъ они относятся, должны быть равны; слѣд. $x^a=Cy^b$; но это уравненіе будетъ Алгебраическое.

Естьли дано будетъ $q-n=-1$, то дифференціальное уравненіе изобразится въ такомъ случаѣ чрезъ $ax^{m-r}dx=\frac{bdy}{y}$, коего интегралъ состоитъ изъ $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1}=bly+lC$; но можно дать Алгебраической видъ и этому уравненію, умноживъ первой членъ на le, (e представляетъ такое число, коего логариѳмъ равенъ 1); ибо чрезъ то равенство уравненія не потеряется. Слѣд. получимъ $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1}le=bly+lC$, или (сдѣлавъ $m-r+1=p$) будемъ имѣть $le^{\frac{ax^p}{p}}=lCy^b$, и слѣд. $e^{\frac{ax^p}{p}}=Cy^b$. Впередъ мы будемъ всегда чрезъ e означать число, коего логариѳмъ равенъ 1.

(*) Можно допускать постоянное логариѳмомъ.

131. Возьмемъ вторымъ примѣромъ уравненіе $ndx = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$; вторая часть его изображаетъ элементъ круговой дуги, коей z служитъ синусомъ, а 1 радіусомъ. Почему ежели z есть синусъ количества $\int\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, то есть, $\int ndx$ или количества $nx+C$, то интеграломъ его получимъ $z =$ син. $(nx+C)$. Равномѣрно по уравненію $\frac{-dz}{\sqrt{(1-zz)}}$ должно заключить, что $z =$ кос. $(nx+C)$.

132. Поелику $\frac{dz}{1+zz}$ изображаетъ элементъ круговой дуги, которой радіусомъ служитъ 1, а z тангенсомъ; то можно также по уравненію $ndx = \frac{dz}{1+zz}$ заключить, что $z =$ танг. $(nx+C)$. Когда же будетъ дано $ndx = \frac{bdz}{a+fzz}$, то для представленія сего уравненія въ видѣ предыдущаго, должно сдѣлать $z = mu$, (m представляетъ постоянной коеффиціентъ), послѣ чего произойдетъ $ndx = \frac{bmdu}{a+fm^2u^2}$; положивъ $fm^2 = a$, получимъ $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$, и слѣд. $ndx = b\frac{\sqrt{\frac{a}{f}}du}{a+auu}$; отсюда выходитъ $\frac{du}{1+uu} = \frac{n}{b}dx\sqrt{af}$, а u, или $\frac{z}{m}$, или $z\sqrt{\frac{f}{a}} = \ldots\ldots$ танг. $\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af}+C\right)$. Слѣд. $z = \sqrt{\frac{a}{f}}\ldots\ldots\ldots$ танг. $\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af}+C\right)$.

133. И такъ $nx + C$ изображаетъ въ найденныхъ теперь выраженіяхъ *син.* $(nx + C)$, и *танг.* $(nx + C)$ длину дуги въ частяхъ радіуса $= 1$. А какъ можно употребить числа градусовъ вмѣсто длины дугъ, то должно, когда повстрѣчаются такія выраженія, дѣлать выкладку дугамъ въ градусахъ такъ: раздѣли ихъ на число частей радіуса, относящееся къ одному градусу, то есть, на 0,0174533, или умножь ихъ (потому что это будетъ все равно) на 57,2974166.

На примѣръ синусъ дуги, имѣющей длиною b, или синусъ дуги, имѣющей число градусовъ, представленное чрезъ $b \times 57,2974166$, будетъ значить одно и тожъ.

134. Есть ли будетъ дано такое уравненіе .... $\frac{ndx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$, котораго части изображаютъ элементы двухъ дугъ, содержащихся между собою, какъ $1 : n$, и коихъ синусы суть x и y; то для интеграціи его должно сдѣлать обѣ части раціональными; и потому сдѣлавъ для первой $\sqrt{(1 - xx)} = x\sqrt{(-1)} - z$, а для второй $\sqrt{(1 - yy)} = y\sqrt{(-1)} - t$, превратимъ уравненіе въ $\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$, котораго интеграломъ будетъ $nlz = lt + lC$, и слѣд. $Ct = z^n$; вставивъ вмѣсто z и t величины ихъ получимъ .... $C[y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - yy)}] = [x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - xx)}]^n$ такое уравненіе, которое изображаетъ вообще содержаніе синусовъ x и y двухъ дугъ.

Употребляя это уравненіе на самомъ дѣлѣ, должно напередъ опредѣлить постоянное C. Положимъ, что обѣ дуги имѣютъ одно начало; слѣд. x и y должны уничтожиться въ одно время, и уравненіе превращается въ $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, или въ $-C = (-1)^n$; а какъ $(-1)^n$ должно состоять изъ $+1$ или -1, глядя по числу n, четное ли оно или нечетное, то $-C = \pm 1$, а $C = \mp 1$, (верхній знакъ принадлежитъ четному n, а нижній нечетному); слѣд. наконецъ $\mp [y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$.

Въ каждомъ частномъ случаѣ можно уничтожить умственныя количества; самой легчайшій для этого способъ состоитъ въ слѣдующемъ: по перенесеніи всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія, приравняй сумму всѣхъ настоящихъ количествъ къ нулю; послѣ чего увидишь, что оставшееся уравненіе будетъ дѣлимо на $\sqrt{(-1)}$, и въ точности сходствовать съ тѣмъ, которое ты приравнялъ къ нулю. На примѣръ пусть будетъ $n = 2$; въ такомъ случаѣ $-y\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{(-1)}$. $\sqrt{(1-xx)} + 1 - xx$, или $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}$. $\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$; естьли приравняешь къ нулю сумму всѣхъ настоящихъ количествъ, то произойдетъ $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$; а остаточное уравненіе будетъ $2x\sqrt{(-1)}$. $\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{(-1)} = 0$. Раздѣливъ его на $\sqrt{(-1)}$, получишь $2x\sqrt{(1-xx)} - y = 0$; или $y = 2x\sqrt{(1-xx)}$; но по возведеніи во вторую степень сего уравненія, и уравненія . . . $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$, или $\sqrt{(1-yy)} = 1 - 2xx$, выдетъ одинакой изъ обоихъ квадратъ.

Можно такимъ же образомъ находить косинусы и тангенсы дугъ, содержащихся между собою. Для тангенсовъ должно интегралить $\frac{ndx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$,

разбивая $1 + xx$ на $(1 + x\sqrt{-1})\ (1 - x\sqrt{-1})$, а $1 + yy$ на $(1 + y\sqrt{-1})(1 - y\sqrt{-1})$; дѣло-производство кончится тѣмъ правиломъ, которое показано было для раціональныхъ дробей.

135. По случаю сей матеріи покажемъ способъ изображать синусъ и косинусъ дуги, способъ, которой можно употреблять съ великою пользою.

Положимъ, что $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$ изображаетъ уравненіе, которое показываетъ отношеніе между дугою x и синусомъ ея y. Естьли сдѣлаемъ $\sqrt{(1 - yy)} = y\sqrt{-1} - z$, то получимъ $dx = \frac{-dz}{z\sqrt{(-1)}}$, или $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{(-1)}$, котораго интеграломъ будетъ $lz = -x\sqrt{-1} + lC$, или $lz = -x\sqrt{-1}\ le + lC$, и слѣд. $z = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$; вставивъ вмѣсто z величину его, будемъ имѣть $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - yy)} = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$. Что принадлежитъ до постояннаго C, то опредѣляя его должно замѣтить, что дуга x и синусъ ея уничтожаются въ одно время, и слѣд. $-\sqrt{1} = C$. И такъ $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - yy)} = -e^{-x\sqrt{(-1)}}$, и $\sqrt{(1 - yy)} = y\sqrt{(-1)} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$; по составленіи квадратовъ и по приведеніи выходитъ $y = \frac{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(-1)}.\ e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; а какъ y есть синусъ x, то выходитъ наконецъ син. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{-1}}$.

Естьли во второй части уравненія $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$ поставимъ вмѣсто y найденную теперь величину его, то произойдетъ $\sqrt{(1-yy)}$, то есть, *кос.* $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$ $= \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$; слѣд. *кос.* $x = \ldots\ldots$ $\frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$. Возвратимся къ интеграціи уравненій,

136. Естьли неопредѣленныя будутъ перемѣшаны въ дифференціальномъ уравненіи, то прежде нежели ихъ разлучать, должно разсмотрѣть, не можно ли обынтегралить случайно уравненіе въ такомъ состояніи, въ какомъ оно дано. А чтобъ это узнать (127), то изслѣдуй, не можетъ ли $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, предположивъ $Adx + Bdy = 0$ даннымъ уравненіемъ. Естьли это условіе можно допустить, то интеграль по правилу (123).

137. Однако можетъ случиться, что уравненіе и не допуская этого условія, будетъ допускать интеграцію; но оно выходитъ такимъ, умножено будучи на приличнаго фактора, сложнаго изъ x, y и постоянныхъ.

Пусть будетъ P этотъ факторъ; въ такомъ случаѣ $APdx + BPdy = 0$ должно представлять пол-

ной дифференціалъ, и слѣд. $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. Теперь все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ сыскать для P функцію въ x, y и постоянныхъ, приличную для сего уравненія. Но какъ это изысканіе весьма продолжительно, то мы ограничиваясь, опредѣлимъ на этотъ разъ P въ однихъ только x и постоянныхъ, или въ однихъ y и постоянныхъ. И такъ положивъ, что P должно состоять изъ x, получимъ $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx}$

$+ P\frac{dB}{dx}$, въ которомъ выходитъ $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B}$

dx; теперь не трудно опредѣлить P, естьли $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ приведено будетъ въ функцію x, какъ того требуетъ настоящее предположеніе.

Можно находить и такого фактора, которой будетъ состоять изъ функціи x, умноженной или раздѣленной на функцію y извѣстнаго виду.

138. Послѣднимъ способомъ можно вообще интегралить всякое уравненіе слѣдующаго виду; $Xy^q dy + X'y^{q+1} dx + X'' y^r dx = 0$, въ которомъ X, X', X'' представляютъ разныя функціи x, а q и r какихъ нибудь показателей.

Пробую, не можно ли сдѣлать его допускающимъ интеграцію чрезъ умноженіе на фактора такого вида Py^n, гдѣ P изображаетъ функцію x, а n неопредѣленнаго показателя, и нахожу, что это сдѣлать можно, положивъ $n = -r$. Но гораздо луч-

те сдѣлаю, ежели вдругъ данное уравненіе приведу въ такой видъ $y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0$, раздѣливъ его на X и на y^r, и представивъ чрезъ F и F' частныя числа $\frac{X'}{X}$ и $\frac{X''}{X}$. Для опредѣленія интеграла сего послѣдняго количества полагаю P, функцію x, факторомъ, и получаю $Fy^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0$. Но естьли P представляетъ функцію x, то и $F'P$ должно представлять ее же. Почему $\int F'Pdx$ будетъ интегроваться на подобіе количествъ съ однимъ перемѣннымъ. Теперь стоитъ только сдѣлать $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ полнымъ диференціаломъ; а для этого надобно, чтобъ $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$, то есть, чтобъ $y^{q-r}\frac{dP}{dx} = (q-r+1)y^{q-r}FP$; отсюда выходитъ $\frac{dP}{P} = (q-r+1)Fdx$, которое обынтегралывъ, получимъ $lP = \int(q-r+1)Fdx = \int(q-r+1)Fdx.le$; слѣд. $P = e^{\int(q-r+1)Fdx}$. Вставивъ эту величину P въ уравненіи $Py^{q-r}dy +$ и проч., и обынтегралывъ его, будемъ имѣть $\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{\int(q-r+1)Fdx} + \int F'dx\, e^{\int(q-r+1)Fdx} + C = 0$.

Интегруя уравненіе, которымъ опредѣлено P, мы не прибавляли никакого постояннаго, потому что не имѣли на то условія, и слѣд. были вольны не вводить его.

Сдѣлаемъ примѣръ. Пусть будетъ дано сыскать интегралъ для $dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)dx = 0$. Умноживъ на фактора P, получаю $Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P\cdot$

$(bx^2 + cx + f)\,dx = 0$. Въ сходственность изъясненнаго надобно, чтобъ $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{AP}{x}$; слѣд. $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$; слѣд. $lP = alx$, или $P = x^a$. Уравненіе превращается послѣ сего въ $x^a dy + ax^{a-1} y dx + bx^{a+2} dx + cx^{a+1} dx + fx^a dx = 0$, коего интегралъ будетъ $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

139. Общее уравненіе, которое мы теперь интегралили, встрѣчается довольно часто; и способъ, употребленной нами для интеграціи его, можетъ служить во многихъ другихъ случаяхъ.

На примѣръ естьли даны будутъ два такія уравненія $dx + ady + (bx + cy)\,Tdt = 0$, и $hdx + a'dy + (b'x + c'y)\,Tdt = 0$, въ которыхъ x, y и t представляютъ перемѣнныя, a, b, c, a' и проч. постоянныя, а T какую нибудь функцію t; то можно опредѣлить интегралъ ихъ по предыдущему способу такъ: умножаю одно изъ нихъ, на примѣръ первое, на неопредѣленнаго, но постояннаго коеффиціента g, и сложивъ произведеніе со вторымъ, умножаю сумму на фактора P, котораго полагаю функціею t; послѣ чего получаю $(gP + hP)\,dx + (gaP + a'P)\,dy + [(gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)\,y]\,Tdt = 0$. Положимъ теперь, что это уравненіе состоитъ изъ полнаго дифференціала; и такъ (128) получимъ

1°. $\frac{d(gP+kP)}{dt} = \frac{d[(gbP+b'P)x+(gcP+c'P)y]T}{dx}$;

2°. $\frac{d(gaP+a'P)}{dt} = \frac{d[(gbP+b'P)x+(gcP+c'P)y]T}{dy}$;

3°. $\frac{d(gP+kP)}{dy} = \frac{d(gaP+a'P)}{dx}$. А какъ P предположено функцiею t, то последнее уравненiе имѣетъ здѣсь мѣсто, потому что оно обращается въ $o = o$. Что принадлежитъ до двухъ первыхъ, то по первому $(g+k)\frac{dP}{dt} = (gb+b')PT$, а по второму $(ga+a')\frac{dP}{dt} = (gc+c')PT$; отсюда выходитъ $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, и $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}Tdt$; сравнивъ обѣ сiи величины между собою и раздѣливъ ихъ на Tdt, будемъ имѣть $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$ уравненiе, въ которомъ g выходитъ второй степени, и по рѣшенiи получаетъ двѣ величины.

По извѣстнымъ величинамъ g не трудно опредѣлить P, потому что изъ уравненiя $\frac{dP}{P} = \ldots \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$ выходитъ $P = e^{\int\frac{gb+b'}{g+k}Tdt}$. А какъ допустили мы уравненiе $(gP+kP)dx+$ и проч. состоящимъ изъ полнаго дифференцiала, то обынтеграливъ его, найдемъ $(gP+kP)x+(gaP+a'P)y+C=o$; и такъ представивъ первую величину g, найденную по уравненiю второй степени, имъ же самимъ, чрезъ g' вторую величину, а чрезъ P' то количество, въ которое должно превратиться P по вставкѣ величины g' вмѣсто величины g, будемъ имѣть $(g'P'+kP')x+(g'aP'+a'P')y+C'=o$,

C' означаетЪ здѣсь новое постоянное. НапослѣдокЪ по двумЪ этимЪ уравненiямЪ не трудно опредѣлить величины x и y, которыя изобразятся вЪ t и постоянныхЪ.

140. Естьли данное дифференцiальное уравненiе не будетЪ относиться кЪ изъясненнымЪ теперь случаямЪ, то попробуй разлучить неопредѣленныя. Иногда это можно сдѣлать по обыкновеннымЪ правиламЪ Алгебры, а иногда по превращенiямЪ. Однако много такихЪ уравненiй, для которыхЪ неизвѣстно приличное превращенiе.

ВЪ уравненiи $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy (e+fx^h)^r$ можно непосредственно разлучить перемѣнныя однимЪ дѣленiемЪ, потому что оно изображаетЪ тоже, что $(a + by^q) x^n dx = y^k dy (e + fx^h)^r$; но это, какЪ не трудно примѣтить, превращается вЪ $\frac{x^n dx}{(e+fx^h)^r}$ $= \frac{y^k dy}{a+by^q}$, котораго интеграцiя относится кЪ двучленнымЪ количествамЪ сЪ однимЪ перемѣннымЪ.

Но естьли бы дано было $gxdx = ax^4 ydy + 2abx^2y^3 dy + abby^5 dy$, то сЪ перваго взгляду примѣчаю, что его можно представить такЪ $gxdx = (x^4 + 2bx^2y^2 + bby^4)\, aydy$. ПотомЪ нахожу, что можно представить его еще и вЪ такомЪ видѣ $gxdx = (x^2 + by^2)^2 \times aydy$, вЪ которомЪ для разлученiя перемѣнныхЪ стоитЪ только сдѣлать $x^2 + by^2 = z$, послѣ чего выходитЪ $x^2 = z - by^2$, а $xdx = \frac{1}{2} dz - bydy$; вставливаю эти величины и получаю $\frac{1}{2} gdz - bgydy =$

$azzydy$, наконецъ вывожу $\frac{\frac{1}{2}gdz}{bg - azz} = ydy$ такое уравненіе, которое удобно интегралится.

141. Поелику не можно предписать общихъ правилъ на превращенія, то мы ограничимъ себя интеграціею нѣкоторыхъ главныхъ случаевъ, въ которыхъ умѣемъ разлучать перемѣнныя.

Можно вообще дѣлать разлученіе во всѣхъ однородныхъ уравненіяхъ съ двумя перемѣнными; именно, въ такихъ уравненіяхъ, гдѣ перемѣнныя x и y, будутъ ли вмѣстѣ стоять, или порознь, имѣютъ въ каждомъ членѣ одинакое число измѣреній.

Допустимъ, что $Adx + Bdy = 0$ представляетъ однородное уравненіе; естьли раздѣлимъ его на степень x, коего показатель равенъ числу измѣреній уравненія, то не трудно понять, что въ A и B не останется послѣ сего кромѣ $\frac{y}{x}$ и постоянныхъ, и слѣд. оно должно перемѣниться въ $Fdx + F'dy = 0$, гдѣ F и F' изображаютъ функціи $\frac{y}{x}$ и постоянныхъ. По предположеніи сего и знавши, что $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xx}$, получимъ $dx = \frac{-xx}{y} d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y} dy$; потомъ сдѣлавъ $\frac{y}{x} = z$, будемъ имѣть $dx = -\frac{ydz}{zz} + \frac{dy}{z}$; и такъ вставивъ вмѣсто $\frac{y}{x}$

и dx величины ихъ, получимъ $-\frac{Fydz}{zz}+\frac{Fdy}{z}\ldots$ $+F'dy=o$, (F и F' будутъ представлять теперь функціи z и постоянныхъ). Но изъ этаго уравненія выходитъ $\frac{dy}{y}=\frac{Fdz}{Fz+F'zz}$ другое раздѣльное, потому что F и F' не заключаютъ въ себѣ кромѣ одного перемѣннаго z.

На примѣръ естьли будетъ дано такое однородное уравненіе $y^3dx+y^2xdy+bx^3dy=o$, въ которомъ число измѣреній состоитъ изъ 3; то дѣлю его на x^3, и получаю $\frac{y^3}{x^3}dx+\frac{y^2}{x^2}dy+bdy=o$; потомъ сдѣлавъ $\frac{y}{x}=z$, или $x=\frac{y}{z}$, вывожу $dx=\frac{zdy-ydz}{zz}$; вставливаю эти величины въ данномъ уравненіи, и нахожу $z^2dy-yzdz+z^2dy+bdy=o$, по которому получаю $\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{2z^2+b}$; интегралъ сего уравненія состоитъ изъ $ly=\frac{1}{4}l(2z^2+b)+lC$, или $y=C(2z^2+b)^{\frac{1}{4}}$, или $y^4=C^4(2z^2+b)$, или наконецъ $y^4=C^4\left(\frac{2y^2}{x^2}+b\right)$ по вставкѣ за z величины его $\frac{y}{x}$.

142. И такъ весьма бы полезно дѣлать уравненія однородными, естьли бы для этого изобрѣтенъ былъ общій способъ; но какъ его нѣтъ, то помогаютъ въ этомъ недостаткѣ превращенія. Тамъ, гдѣ можно надѣяться успѣха отъ превращеній, должно прирав-

нивать одно изЪ перемѣнныхЪ или функцію его, или функцію двухЪ кЪ функціи новаго перемѣннаго сЪ неопредѣленными показателями. Эти показатели опредѣляются по условію, чтобЪ превращенное уравненіе сдѣлалось однороднымЪ.

На примѣрЪ желая сыскать, вЪ какихЪ случаяхЪ уравненіе $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = o$, кЪ коему относятся всѣ трехчленныя, вообще можетЪ сдѣлаться однороднымЪ; то положу $x = z^h$ и выведу $ahz^{mh+h-1} dz + by^n z^{qh} dy + cy^k dy = o$. А чтобЪ настоящее уравненіе представляло однородное, то должно, чтобЪ $k = qh + n$, и $k = mh + h - 1$; отсюда выходитЪ $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, и $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$. Естьли показатели k, q, m и n будутЪ таковы, что это послѣднее уравненіе можетЪ состояться, то можно сдѣлать данное уравненіе однороднымЪ, и слѣд. разлучить перемѣнныя.

О КоличествахЪ и дифференціальныхЪ УравненіяхЪ втораго, третьяго и проч. порядка.

143. ТажЪ свобода, по которой (19) принимали мы вЪ дифференціаціи постояннымЪ количествомЪ какой нибудь одинЪ изЪ первыхЪ дифференціаловЪ, облегчаетЪ во многихЪ случаяхЪ и интеграцію. А какЪ можетЪ случиться, что взятой дифференціалЪ

на удачу постояннымъ не будетъ болѣе другихъ способствовать интеграціи; то мы нужнымъ почитаемъ показать, какъ приводить дифференціальное уравненіе, въ которомъ одинъ изъ дифференціаловъ предположенъ постояннымъ, въ другое, гдѣ бы не было никакого постояннаго, и въ которомъ бы можно брать имъ произвольное количество.

Положимъ, что $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = o$ представляетъ уравненіе съ двумя перемѣнными и со вторыми дифференціалами, въ которомъ первой дифференціалъ dx одного изъ перемѣнныхъ былъ принятъ сначала за постоянное количество. Раздѣливъ это уравненіе на dx, изображаю его такъ, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$, которое въ самомъ дѣлѣ будетъ одинаково съ даннымъ, пока dx будетъ представлять постоянное, ибо $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ равно $\frac{ddy}{dx}$. Но естьли dx принято будетъ перемѣннымъ, то $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, и слѣд. уравненіе перемѣнится въ $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = o$, въ которомъ не находится больше постояннаго дифференціала.

Возьмемъ теперь $Adx^3 + Bdx^2 dy + Cdy^2 dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = o$ уравненіе съ третьими дифференціалами, въ которомъ dx допускается постояннымъ.

Дѣлю на dx^2 и вывожу $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + E\frac{ddy}{dx} + F\frac{dyddy}{dxdx} + G\frac{d^3y}{dx^2} = o$, которое можно изобразить такъ $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right) + Gd\left[\left(\frac{1}{dx}\right) d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = o$; теперь принявъ въ этихъ дифференціяціяхъ, означенныхъ показаніемъ, всѣ количества перемѣнными, получимъ такое уравненіе, въ которомъ не будетъ больше постояннаго дифференціала.

Сдѣлаемъ примѣръ. Положимъ, что съ перваго взгляду непримѣтно, какъ уравненіе $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, въ которомъ dx принято постояннымъ, можно интегралить; но естьли сдѣлаемъ dx перемѣннымъ, изобразивъ такъ, $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx) d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, то можно въ этой дифференціаціи, означенной показаніемъ, принять dy за постоянное, и вывести $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$ такое уравненіе, которое по приведеніи превращается въ $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = o$, и котораго интегралъ, какъ то легко можно видѣть, состоитъ изъ $xdx + adx - ydy + Cdy = o$ съ присовокупленіемъ постояннаго Cdy одинакаго порядка съ интеграломъ. Обынтегралива снова это уравненіе, будемъ имѣть $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = o$.

144. Предписанное (123) правило для интегрованія дифференціальныхъ количествъ со многими перемѣнными принадлежитъ имъ

вообще, какого бы порядка онѣ не были; надобно только ddx, ddy, d^3x, d^3y и проч. предполагать разными перемѣнными.

Почему естьли дано будетъ обынтегралить такое количество $x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2)dxdy + 2y^2xdx^2$, въ которомъ dx принято постояннымъ; то стану интегралить его, допустивъ сначала одно ddy перемѣннымъ, и получу x^3y^2dy. Потомъ взявъ его дифференціалъ, которой состоитъ изъ $3x^2y^2dxdy + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$, вычту оной изъ даннаго; остатокъ выдетъ $2x^2ydxdy + 2y^2xdx$. Интегралю теперь, принимая одно y перемѣннымъ, и нахожу x^2y^2dx. Дифференціалю это количество, и вычитаю изъ перваго остатка дифференціалъ его $2x^2ydydx + 2x^2y^2dx$; но поелику въ остаткѣ не выходитъ ничего, то заключаю, что интегралъ даннаго количества долженъ быть $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$ съ присовокупленіемъ постояннаго Cdx одного съ нимъ порядка.

145. Что принадлежитъ до дифференціальныхъ уравненій, то и ихъ должно интегралить такимъ же образомъ, когда они будутъ къ тому способны въ данномъ ихъ состояніи; а это можно узнать по послѣднему остатку, которой, какъ было сказано, въ продолженіи интеграціи долженъ выйти равенъ нулю.

Естьли же найдется послѣдній остатокъ не таковъ, то и тутъ не должно еще заключать, чтобъ уравненія не могли инте-

гроваться. Поелику равенство частей не уничтожается отъ умноженія или раздѣленія ихъ на одинакое количество, то можетъ случиться, что умноживъ уравненіе на какого нибудь фактора, сдѣлаемъ его способнымъ интегралиться.

Общее правило для сысканія такого рода фактора не можетъ быть предметомъ теперешняго нашего занятія. Хотя его можно находить для многихъ случаевъ, не рѣдко весьма сбивчивыхъ; но мы ограничимъ себя однимъ, которой встрѣчается чаще другихъ въ Физико-Математическихъ вопросахъ. И такъ займемся на этотъ разъ интеграціею уравненія такого вида $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = o$, или $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = o$, или вообще $d^ny + ad^{n-1}ydx + bd^{n-2}ydx + \ldots mydx^n + Xdx^n = o$, въ которыхъ dx, коеффиціенты a, b, c и проч. принимаются постоянными, а X какою нибудь функціею количества x.

Всѣ такого рода уравненія будучи умножены на фактора, состоящаго изъ x и постоянныхъ, становятся способными интегралиться; и вотъ какъ находить этого фактора.

Возьмемъ въ разсужденіе одно изъ означенныхъ уравненій $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = o$; раздѣливъ въ немъ членъ $adydx$ на два другія $kdydx$ и $(a-k)$ $dydx$, получимъ $ddy + kdydx + (a-k)\ dydx + bydx^2 + Xdx^2 = o$. Естьли теперь допустимъ k постояннымъ, но неопредѣленнымъ количествомъ, то найдемъ послѣднее уравненіе способнымъ интегралиться, умноживъ его на фактора P, состоящаго изъ функціи x и постоянныхъ.

По предположеніи сего уравненіе $Pddy + Pkdydx + P(a-k)\ dydx + Pbydx^2 + PXdx^2 = o$ должно интегроваться. Представляю его въ такомъ видѣ $Pddy + Pkdxdy + [P(a-k)\ dy + Pbydx + PXdx]\ dx = o$.

Но допуская это уравненіе способнымъ интегралиться, надобно допустить (128) три слѣдующія уравненія:

1. $\frac{dP}{dy} = \frac{d(Pkdx)}{ddy}$;

2. $\frac{dP}{dx} = \frac{d[P(a-k)\ dy + Pbydx + PXdx]}{ddy}$;

3. $\frac{d(Pkdx)}{dx} = \frac{d[P(a-k)\ dy + Pbydx + PXdx]}{dy}$,

Изъ перваго выходитъ $o = o$, потому что P и k предполагаются такими количествами, которыя не содержатъ въ себѣ ни y, ни dy; изъ втораго по той же причинѣ $\frac{dP}{dx} = P(a-k)$, а изъ третьяго $\frac{Pdk + kdP}{dx} = Pb$, или только $\frac{kdP}{dx} = Pb$, потому что k принято постояннымъ. в

Извлекши въ этихъ уравненіяхъ величину $\frac{dP}{P}$, получимъ $\frac{dP}{P} = (a-k)\,dx$, и $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{k}$; сравнивъ объ сіи величины, найдемъ $a-k = \frac{b}{k}$, или $kk - ak + b = o$. Количество k опредѣлится по правиламъ втораго уравненія, и будетъ имѣть двѣ величины. Представивъ этѣ величины чрезъ m и m', выведемъ 1^e. $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{m}$, и слѣд. лог. $P = \frac{bx}{m}$, или $P = e^{\frac{bx}{m}}$; и такъ уравненіе $Pddy$ + и проч. превратится въ $ddye^{\frac{bx}{m}} + mdydxe^{\frac{bx}{m}} + (a-m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = o$.

Приступая къ интеграціи его, беру сначала (144) интегралъ члена $ddye^{\frac{bx}{m}}$, принимая одно ddy перемѣннымъ, и получаю $dye^{\frac{bx}{m}}$. Одифференціаливъ его, вычитаю изъ уравненія и нахожу въ остаткѣ $(m + a - \frac{b}{m} - m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$. Но изъ уравненія $kk - ak + b = o$, совершенно одинакаго съ $mm - am + b = o$, выходитъ $a - \frac{b}{m} - m = o$; слѣд. остальное для интеграціи количество будетъ $mdydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$. Беру интегралъ его, почитая одно y перемѣннымъ, и нахожу $mydxe^{\frac{bx}{m}}$ вторымъ членомъ интеграла. Одифференціаливъ, вычитаю его изъ

перваго остатка, и получаю за разность $Xdx^2 e^{\frac{bx}{m}}$, котораго интегралЪ изобразимЪ вообще чрезЪ $dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}}$; а какЪ сей интегралЪ заключаетЪ вЪ себѣ одно только перемѣнное, то найдемЪ его по правиламЪ, предписаннымЪ для одного перемѣннаго, слѣдующимЪ $dye^{\frac{bx}{m}} + mydxe^{\frac{bx}{m}} + dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = C$, или $dy + mydx + dxe^{\frac{-bx}{m}} \int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = Ce^{\frac{-bx}{m}}$; но поелику k имѣетЪ двѣ величины, то употребивЪ вторую, изображенную чрезЪ m', получимЪ равномѣрно . . . . $dy + m'ydx + dxe^{\frac{-bx}{m'}} \int Xdxe^{\frac{bx}{m'}} = C'e^{\frac{-bx}{m'}}$, гдѣ C' представляетЪ постоянное такой интеграціи, какая выходитЪ по принятіи новой величины m' количества k.

СравнивЪ двѣ величины dy, выведенныя по послѣднимЪ уравненіямЪ, будемЪ имѣть наконецЪ

$$y = \frac{Ce^{\frac{-bx}{m}} - C'e^{\frac{-bx}{m'}} + e^{\frac{-bx}{m}} \int Xdxe^{\frac{bx}{m}} - e^{\frac{-bx}{m'}} \int Xdxe^{\frac{bx}{m'}}}{m - m'}.$$

146. СЪ уравненіями третьяго порядка должно поступать также.

На примѣрЪ естьли будетЪ дано такое $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, то представивЪ его чрезЪ $d^3y + kddydx + (a - k)\, ddydx + k'dydx^2 + (b - k')\, dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, вЪ которомЪ k и k' принимаются неизвѣстными, но постоянными, найдемЪ это послѣднее уравненіе спо-

собнымъ интегралиться, когда оно будетъ умножено на факшора P, заключающаго въ себѣ одни только x и постоянныя; то есть, найдемъ способнымъ интегралиться уравненіе $Pd^3y + Pkddydx + P(a-k)\ ddydx + Pk'dydx^2 + P(b-k')\ dydx^2 + Pcydx^3 + PXdx^3 = 0$. Перемѣнивъ видъ этого уравненія въ слѣдующій другой $Pd^3y + Pkdxddy + [P(a-k)\ ddy + Pk'dydx] \times dx + [P(b-k')\ dydx + Pcydx^2 + PXdx^2]\ dx = 0$, выведемъ (128) шесть уравненій, изъ которыхъ по сдѣланному для k, k' и P предположенію останется только три; въ заключительномъ уравненіи найдемъ три величины для k, и три для k' и P. Поступая въ сходственность предыдущаго случая, получимъ три уравненія въ y, x, dx, dy и ddy. По уничтоженіи ddy и dy, опредѣлимъ послѣднюю величину y въ x и постоянныхъ.

147. Отсюда не трудно теперь вывести заключенія, какъ должно поступать съ уравненіями вышнихъ степеней.

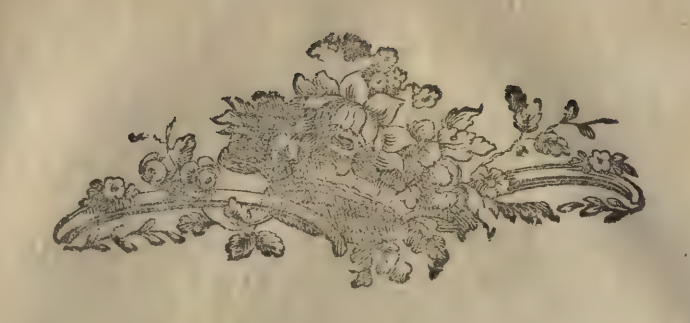
Тотъ же самой способъ употребляется и во всѣхъ другихъ случаяхъ, гдѣ будетъ больше перемѣнныхъ, чѣмъ въ показанныхъ; только бы эти перемѣнныя не превосходили первую степень, и не были умножены ни между собою, ни на дифференціалы перемѣнныхъ, кромѣ дифференціала постояннаго.

Естьли даны будутъ два такія уравненія $addy + bddz + cdydx + edzdx + fydx^2 + gzdx^2 + Xdx^2 = 0$, и $a'ddy + b'ddz + c'dydx + e'dzdx + f'ydx^2 + g'zdx^2$

$+X'dx^2 = 0$, то привожу ихъ въ одно, сложивъ первое со вторымъ, умноженнымъ на неопредѣленнаго, но постояннаго коеффиціента q. Потомъ въ выведенномъ дѣлю члены, заключающіе въ себѣ dy и dz, на двѣ части, какъ было показано выше; наконецъ умножаю на фактора, состоящаго изъ функціи x и постоянныхъ.

148. Въ заключеніи всего того, что принадлежитъ до дифференціальныхъ уравненій, замѣтимъ, что естьли въ уравненіи съ двумя перемѣнными не будетъ доставать какого-нибудь перемѣннаго, то можно всегда представить такое уравненіе въ дифференціалахъ непосредственно вышняго порядка; а это сдѣлай, приравнявъ первой дифференціалъ одного изъ перемѣнныхъ къ дифференціалу другаго, умноженному на новое перемѣнное.

На примѣръ естьли дано будетъ для интеграціи уравненіе $\frac{ddy}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = (ay+b)$ dx, въ которомъ dx предположено постояннымъ, и въ которомъ не достаетъ перемѣннаго x; то сдѣлавъ $dy = pdx$, получаю $ddy = dpdx$, и слѣдовательно $\frac{dp}{p}\sqrt{(1+pp)} = (ay+b).\frac{dy}{p}$, или $dp\sqrt{(1+pp)}$ $= (ay+b)dy$; вторая часть этого уравненія интегралится Алгебраически, а первая отчасти Алгебраически же, и отчасти по логариѳмамъ, когда сдѣлаешь $\sqrt{(1+pp)}$ раціональнымъ, по изъясненному (117) правилу.



ОБЩІЯ ПРАВИЛА *МЕХАНИКИ.*

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

149. Подъ именемъ *Механики* разумѣемъ науку о Движеніи и Равновѣсіи.

Тѣло почитаемъ движущимся тогда, когда оно само или нѣкоторыя его части переносятся съ одного мѣста на другое.

Тѣло или совокупленіе многихъ вещественныхъ частей не можетъ само собою притти въ движеніе; но побуждается къ тому причиною, безъ которой впрочемъ существовать можетъ.

Причина эта, способная привести тѣло въ движеніе, называется *Силою* или *Могуществомъ*.

Равновѣсіе есть такое состояніе, въ которое приходитъ тѣло, или совокупленіе, или наконецъ *Система* тѣлъ посредствомъ нѣсколькихъ силъ, коихъ дѣйствія уничтожаются сами по себѣ, или по другимъ препятствіямъ.

Спокойствіе тѣла есть такое состояніе, въ которомъ оно или части его не только не переносятся съ одного мѣста на другое, но и никакою силою не бываютъ къ тому побуждаемы.

Для предписанія правилъ на движеніе и равновѣсіе, мы допустимъ сначала, что въ Натурѣ не существуетъ ничего другаго, кромѣ тѣлъ, о которыхъ мы будемъ говорить, и передаваемыхъ имъ силъ.

И такъ мы намѣрены сначала разсмотрѣть тѣла такими, которыя лишены тяжести, и совершенно свободны, предполагая, что нѣтъ ни воздуха, ни тяжести, ни тренія, ни всякаго другаго сопротивленія.

Потомъ мы будемъ разсматривать ихъ, допустивъ сіи препятствія; но для измѣренія дѣйствій сихъ послѣднихъ должно напе-

редѣ изслѣдовать предыдущія вещи вѣ простѣйшемѣ ихѣ состояніи.

150. По предположеніи сего заключаемѣ безѣ всякаго сомнѣнія, что тѣло получивши движеніе посредствомѣ какой нибудь причины, должно пребывать вѣ этомѣ состояніи движенія безѣ всякой перемѣны величины и направленія до тѣхѣ порѣ, пока тажѣ или новая сила не подѣйствуетѣ на него иначе. Вѣ самомѣ дѣлѣ сказали мы, что тѣло не можетѣ дать себѣ движенія, и слѣд. оно не можетѣ его отнять у себя, потому что отнять у себя движеніе значитѣ дать его себѣ вѣ противномѣ смыслѣ; притомѣ же мы не допускаемѣ никакого вѣ Натурѣ препятствія.

И такѣ движеніе должно быть естественно равно, или однообразно и прямолинейно. Приступимѣ разсматривать свойства его.

Объ однообразномъ Движеніи.

151. Однообразное движеніе тѣла бываетѣ тогда, когда оно движется всегда одинаково, то есть, когда оно пробѣгаетѣ одинакое пространство вѣ одинакое время.

При сравненіи двухѣ тѣлѣ, движущихся однообразно, надобно смотрѣть на простран-

ство, пробѣгаемое каждымъ въ одинаковое и опредѣленное время, какъ-то въ минуту, секунду и проч. Это пространство называется *Скоростїю.*

152. И такъ скорость тѣла есть собственно то пространство, которое протекаетъ тѣло одинакимъ образомъ въ опредѣленное время, называемое *единицею времени.*

Почему считая время по секундамъ въ однообразныхъ движенїяхъ двухъ тѣлъ, изъ которыхъ одно въ секунду пробѣгаетъ 5 футовъ, а другое 6 футовъ, говорю, что скорость перваго состоитъ изъ 5 футовъ, а втораго изъ 6 футовъ.

Но естьли бы кто, принимая также секунду за единицу времени, сказалъ мнѣ, что нѣкоторое тѣло пробѣжало 100 футовъ въ 5 секундъ; то 100 футовъ не изобразили бы въ такомъ случаѣ скорости; ибо я замѣчаю, что тѣло въ каждую секунду протекаетъ только пятую часть того числа, или 20 футовъ, и потому для опредѣленїя скорости его, дѣлю число 100 частей пройденнаго пространства на число 5 употребленныхъ единицъ.

153. И такъ вообще *скорость бываетъ равна пространству, раздѣленному на время*; то есть, назвавъ V скорость, E пространство, протекаемое тѣломъ въ опредѣленное время T, получимъ $V = \frac{E}{T}$; и это почитается однимъ изъ главныхъ правилъ Механики.

154. Изъ уравненія $V = \frac{E}{T}$ выводимъ не только мѣру скорости, но и еще мѣру пространства и времени. Ибо естьли примемъ неизвѣстными попеременно E и T, то получимъ по обыкновеннымъ правиламъ Алгебры $T = \frac{E}{V}$, и $E = VT$.

Слѣд. *для опредѣленія времени должно раздѣлить пространство на скорость; а для опредѣленія пространства должно умножить скорость на время.*

Мы употребляемъ здѣсь Алгебраическіе знаки не для того, чтобъ они облегчали понятіе начальныхъ истиннъ, а потому что посредствомъ ихъ легче припомнить этѣ истины; ибо изъ самаго примѣра можно видѣть, что затвердивъ единожды начальное правило, два другіе можно вывести помощію обыкновенныхъ Алгебраическихъ переложеній.

155. Отсюда явствуетъ, съ какою легкостію можно теперь сравнивать однообразныя движенія двухъ или нѣсколькихъ тѣлъ.

На примѣръ естьли бы кто меня спросилъ, въ какомъ содержаніи будутъ скорости двухъ тѣлъ, описующихъ извѣстныя пространства E и e въ извѣстныя времена T и t; то назвавъ V и u скорости

этихЪ двухЪ тѣлЪ, получу $V = \frac{E}{T}$, и $u = \frac{e}{t}$ (153); слѣд. $V : u = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; то есть, *скорости содержатся между собою, какъ пространства, раздѣленныя на времена.*

СловомЪ: при сравненіи скоростей, пространствЪ или временЪ, правило, принятое нами за начало (153), покажетЪ изображеніе каждой вещи для каждаго тѣла; слѣд. надобно только умѣть сравнивать этѣ выраженія.

НапримѣрЪ желая сравнить пространства, нахожу по начальному правилу $V = \frac{E}{T}$, что $E = VT$; равномѣрно для другаго тѣла получаю $e = ut$; слѣд. $E : e = VT : ut$; то есть, *пространства содержатся между собою, какъ скорости умноженныя на времена.*

156. Естьли изЪ упомянутыхЪ трехЪ вещей, именно пространства, времени и скорости случится одна какая нибудь равною для каждаго тѣла, и мы захотимЪ сравнить только двѣ прочія; то должно приискать выраженія той разной вЪ особенности для каждаго тѣла, и сравнить ихЪ между собою.

НапримѣрЪ желая узнать, какое содержаніе будутЪ имѣть пространства, при одинакихЪ скоростяхЪ, вывожу вопервыхЪ $V = \frac{E}{T}$ и $u = \frac{e}{t}$; а какЪ

предполагается $V = u$, то получаю также $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$ или $Et = eT$, откуда вывожу $E : e = T : t$; то есть, *при равныхъ скоростяхъ пространства содержатся между собою какъ времена.*

Такимъ же образомъ найдемъ, что при одинакомъ времени пространства будутъ содержаться какъ скорости; и потому дабы два тѣла могли описать одинакое пространство, надобно, чтобъ скорости ихъ были взаимно пропорціональны къ временамъ. Ибо $E = VT$, и $e = ut$; слѣд. когда $E = e$, то и $VT = ut$; отсюда выходитъ $V : u = t : T$.

И такъ по одному начальному свойству, что $V = \frac{E}{T}$, находимъ способъ сравнивать всѣ обстоятельства однообразныхъ движеній.

О Силахъ и о Количествѣ движенія.

157. Сумма матеріальныхъ частей, изъ которыхъ состоитъ тѣло, называется *массою* его; но мы подъ этимъ словомъ разумѣть здѣсь будемъ число, изображающее изъ сколькихъ матеріальныхъ частей состоитъ тѣло.

Сила, какъ мы уже упомянули, есть причина, которая движетъ или силится двигать тѣло.

Поелику силы извѣстны намъ по своимъ дѣйствіямъ, то по дѣйствіямъ же своимъ онѣ должны и измѣряться. Дѣйствіе силы состоитъ въ скорости, которую оно пере-

даетъ каждой матеріальной части тѣла. Слѣд. естьли всѣ части получатъ одинакую скорость, что мы и намѣрены здѣсь предположить, то дѣйствіе движущей причины должно имѣть мѣрою скорость, умноженную на число матеріальныхъ частей тѣла, т. е. на массу его. Слѣд. *сила измѣряется скоростію, умноженною на массу.*

158. Произведеніе массы тѣла на скорость называется *количествомъ движенія* тѣла. И такъ *силы измѣряются количествомъ производимаго ими движенія.*

На примѣръ означивъ произведеніе сіе чрезъ F, массу чрезъ M, а скорость чрезъ V, получимъ $F = MV$.

Изъ этого уравненія выходятъ два другія $V = \frac{F}{M}$, и $M = \frac{F}{V}$, которыя показываютъ 1е. что *по извѣстнымъ движущей силѣ тѣла и массѣ его можно узнать, какова должна быть скорость, раздѣливъ движущую силу на массу.* 2е. *По извѣстнымъ движущей силѣ и скорости можно узнать, какова должна быть масса, раздѣливъ движущую силу на скорость.*

Не надобно терять изъ виду, что мы здѣсь понимаемъ подъ F не самую движущую силу, но дѣйствіе ея.

159. И такъ предположивъ количество f означающимъ движущую силу какой нибудь другой массы m, а u скорость ея, получимъ $f = mu$; слѣд. $F : f = MV : mu$; то есть, *движущія силы содержатся между собою какъ массы, умноженныя на скорости.*

Наконецъ естьли изъ каждаго уравненія $F = MV$ и $f = mu$ выведемъ величины M и m, потомъ величины V и u, то получимъ содержаніе массъ по содержанію силъ и скоростей, также содержаніе скоростей по содержанію силъ и массъ; потомъ заключимъ 1е. *что при равныхъ массахъ движущія силы будутъ содержаться между собою какъ скорости.* 2е. *Что при равныхъ скоростяхъ силы будутъ содержаться какъ массы.* 3е. *Что при равныхъ силахъ скорости будутъ содержаться въ обратномъ содержаніи массъ.* А чтобъ увѣриться въ истиннѣ сего, то приравняй попеременно величины M къ m, V къ u, и напослѣдокъ F къ f; тогда въ каждомъ случаѣ выдетъ такое уравненіе, которое превращено будучи въ пропорцію, докажетъ одно изъ упомянутыхъ предложеній.

ПРИМѢЧАНІЕ.

160. Масса или число матеріальныхъ частей тѣла зависитъ отъ его удѣльной величины (Volume) и отъ того, что называется *плотностію.* Поелику тѣла проницаетъ великое число пустоты, которая называется *порами*, то количество матеріи тѣлъ не можетъ быть пропорціонально видимой ихъ величинѣ; ибо подъ одною и тою же величиною тѣла тѣмъ больше заключается матеріи, чѣмъ части его бываютъ плотнѣе между собою; слѣд. говоря, что одно тѣло плотнѣе другаго, разумѣемъ не иное чрезъ это, какъ что первое при одинакой видимой величинѣ заключаетъ въ себѣ больше матеріи, чѣмъ послѣднее. И на оборотъ утверждаемъ, что одно тѣло бываетъ не такъ плотно, какъ другое, или рѣже его, когда

при равной величинѣ оно содержитъ въ себѣ меньше матеріи.

И такъ по плотности и удѣльной величинѣ тѣла можно судить о числѣ матеріальныхъ частей; на примѣръ естьли сказано будетъ, что золото въ 19 разъ плотнѣе воды, то должно разумѣть чрезъ это, что золото содержитъ въ себѣ въ 19 разъ больше частей противъ воды въ одинакомъ пространствѣ.

Принимая плотность количествомъ, изображающимъ число матеріальныхъ частей опредѣленной величины, принимаемой за *единицу величины*, заключаемъ, что для опредѣленія массы или всего числа матеріальныхъ частей тѣла, коего величина извѣстна, должно умножить плотность на величину.

На примѣръ естьли плотность одного кубическаго дюйма золота будетъ состоять изъ 19, то количество матеріи 10 кубическихъ дюймовъ его изобразится чрезъ 19, умноженное на 10. Такимъ образомъ представивъ вообще массу чрезъ M, величину или толщину чрезъ S, а плотность чрезъ D, получимъ $M = S \times D$; послѣ чего не трудно уже будетъ сравнить массы, толщины и плотности тѣлъ.

Мы скоро увидимъ, что массы тѣлъ находятся въ одинакой пропорціи съ своимъ вѣсомъ, и потому въ практикѣ можно допускать вѣсъ за массу.

О Движеніяхъ одинаково или равномѣрно ускоренныхъ.

161. Тѣло побуждено будучи однажды къ движенію, продолжаетъ его съ одинакою скоростію и въ такомъ направленіи, какое дано ему въ первое мгновеніе (150). Но естьли тѣло получитъ новое побужденіе къ движенію въ туже или противную сторону съ первымъ разомъ, то оно начнетъ двигаться со скоростію, равною суммѣ или разности двухъ впечатлѣнныхъ ему скоростей; въ этомъ нѣтъ никакого сумнѣнія.

Естьли вообразимъ теперь, что тѣло по временамъ будетъ получать новыя побужденія въ одну сторону или въ противную съ первымъ разомъ, то оно должно двигаться *перемѣннымъ* или неравнымъ движеніемъ; скорость его будетъ различна при началѣ каждаго времени.

Какъ бы то ни было, но скорость его по истеченіи какого нибудь времени должна измѣряться пространствомъ, которое оно будетъ способно описывать въ единицу времени, получивъ однообразное движеніе.

Мы вообще называемъ *ускорительною силою* ту, которая дѣйствуетъ на тѣло, измѣняя его движеніе. Естьли эта сила

въ разныя времена дѣйствуетъ одинаково, то она называется *постоянно - прибывающею* или *постоянно - убывающею*, судя потому, увеличиваетъ ли она настоящую скорость движимаго, или уменьшаетъ ее.

Разсмотримъ теперь обстоятельства движенія равномѣрно ускореннаго.

162. Поелику прибывающая сила дѣйствуетъ въ такомъ движеніи всегда одинакимъ образомъ, то принявъ g за сообщаемую ею скорость въ каждую единицу времени, увидимъ, что послѣдовательныя скорости движимаго должны быть g, $2g$, $3g$; такъ что по истеченіи нѣкотораго числа единицъ времени, означеннаго чрезъ t, пріобрѣтенная тѣломъ скорость будетъ состоять изъ g, взятаго столько разъ, сколько находится единицъ въ t; то есть, будетъ состоять изъ $g \times t$, или gt.

163. И такъ 1[е]. въ однообразно возрастающемъ движеніи числа степеней скорости, пріобрѣтаемой движимымъ, увеличиваются подобно числамъ временъ, въ которыя продолжается каждое движеніе, что выражаемъ иначе, говоря такъ: *пріобрѣтен-*

ныя скорости содержатся между собою, какъ протекшія времена сначала движенія.

Слѣд. представивъ чрезъ u пріобрѣтенную скорость движимымъ по истеченіи времени t, будемъ имѣть $u = gt$.

2^е^. Скорости, получаемыя движимымъ тѣломъ попеременно въ продолженіе каждаго времени, составляютъ Ариѳметическую прогрессію. ÷ g, $2g$, $3g$ и проч., коей послѣднимъ членомъ долженъ быть gt или u, и въ которой число членовъ означается чрезъ t, то есть, числомъ дѣйствій ускорительной силы.

3^е^. А какъ скорости сіи g, $2g$ и проч. не иное что представляютъ, какъ описанное пространство движимымъ въ соотвѣтственное тому время (151), то все пространство, описанное во время t, должно изобразиться суммою членовъ Ариѳметической прогрессіи; то есть, оно должно состоять (*Алг.* 171) изъ $(g + u) \times \frac{t}{2}$. И такъ представивъ чрезъ e все пространство, пройденное сначала движенія, получимъ $e = \ldots$ $(g + u)\frac{t}{2}$.

164. Вообразимъ теперь, что ускорительная сила дѣйствуетъ безпрерывно, или,

что все равно, представимъ себѣ время раздѣленнымъ на безчисленное множество безконечно малыхъ частей, какъ-то мгновенія, въ которыя прибывающая сила при началѣ каждаго или по истеченіи его передаетъ новое побужденіе движимому. Естьли, говорю, вообразимъ при томъ, что эта сила дѣйствуетъ по безконечно малымъ степенямъ; то должно въ уравненіи $e = (g + u)\frac{t}{2}$ опустить количество g, какъ безконечно малое въ разсужденіи u; и слѣд. получимъ просто $e = \frac{ut}{2}$.

165. Положимъ наконецъ, что ускорительная сила по истеченіи времени t перестаетъ дѣйствовать; тогда тѣло должно (150) продолжать движеніе свое со скоростію u, до того пріобрѣтенною; то есть, оно должно въ каждую единицу времени описать пространство $= u$ (151); и слѣд. не переставая двигаться съ одинакою скоростію, оно опишетъ во время t пространство $= u \times t$, то есть, вдвое больше e или $\frac{ut}{2}$; описаннаго имъ (164) въ тожъ время по перемѣнному дѣйствію прибывавшей силы. И такъ *въ движеніи однообразно и безпрерывно возрастающемъ описанное пространство тѣ-*

лом͡ъ въ нѣкоторое время, бываетъ всегда равно половинѣ пространства, которое оно можетъ описать въ тожъ время съ пріобрѣтенною скоростію, продолжаемою одинаково.

166. Поелику пріобрѣтенныя скорости (163) возрастаютъ въ содержаніи протекшихъ временъ, и потому назвавъ p пріобрѣтенную скорость по прошествіи секунды, получимъ pt за пріобрѣтенную скорость по прошествіи числа t секундъ, и слѣд. $u = pt$. Уравненіе $e = \frac{ut}{2}$, найденное выше, превращается послѣ сего въ $e = \frac{ptt}{2}$. Слѣд. естьли представимъ чрезъ E другое пространство, описанное такимъ же образомъ во время T, то произойдетъ уравненіе $E = \frac{pT^2}{2}$, по которому заключимъ $e : E = \frac{ptt}{2} : \frac{pTT}{2} = tt : TT$. Это показываетъ намъ, что *пространства, описанныя однообразно и безпрерывно возрастающимъ движеніемъ, содержатся между собою какъ квадраты временъ.*

167. А поелику скорости (163) находятся въ содержаніи временъ, то *пространства будутъ находиться также въ квадратномъ содержаніи скоростей.*

168. Слѣд. *скорости и времена будутъ содержаться между собою, какъ квадратные корни изъ пространствъ, описанныхъ сначала движенія.*

169. Все это относится равно и до движеній однообразно убывающихъ, лишь бы мы почитали времена протекаемыми, а пространства описываемыми до уничтоженія скорости.

170. Въ найденномъ выше уравненіи (166) $s = \frac{pt^2}{2}$, количество p, подъ которымъ разумѣли мы скорость, какую способна произвести въ движимомъ увеличивающаяся сила перемѣннымъ своимъ дѣйствіемъ въ каждую секунду времени, будемъ называть впередъ ея же именемъ; потому что мы должны судить объ этой силѣ по дѣйствію ея; но это дѣйствіе познается не по другому чему, какъ по сообщенной тѣлу извѣстной скорости въ опредѣленное время.

О свободномъ Движеніи тяжелыхъ Тѣлъ.

171. Къ тому же роду движенія, о которомъ мы разсуждали въ предыдущей статьѣ, должно относить движеніе и тяжелыхъ тѣлъ. Но прежде, нежели покажемъ на практикѣ изъясненную теорію, почитаемъ нужнымъ

познакомить Читателей своихъ съ нѣкоторыми предметами, касающимися до тяжести.

Мы понимаемъ подъ тяжестію такую силу, которая побуждаетъ тѣла стремиться по вертикальнымъ или перпендикулярнымъ линеямъ къ поверхности водъ. Естьли бы земля была совершенно шарообразна, то всѣ направленія тяжести должны бы сойтися въ центръ ея. Но хотя поверхность земли не во всей точности имѣетъ сферической видъ, и потому они нѣсколько отъ центра удаляются; совсѣмъ тѣмъ въ трактуемыхъ нами предметахъ мы можемъ безъ чувствительной погрѣшности почитать направленія тяжести, упадающими въ самой центръ земли.

Мы имѣли уже случай (*Геом.* 338) сказать, что полупоперешникъ земли, принимаемой за сферическую, содержитъ въ себѣ 19605480 футовъ. Отсюда слѣдуетъ заключить, что уголъ, отвѣчающій одной секундѣ при центрѣ земли, должен имѣть пространства на поверхности ея въ $15\frac{2}{3}$ тоизовъ. Слѣд. въ машинѣ длиною 16 тоизовъ, направленія тяжести при обоихъ концахъ ея будутъ разниться отъ параллелей на уголъ близу одной только секунды. И такъ *въ одномъ мѣстѣ можно почитать направленія тяжести всегда параллельными.*

Что касается до величины сей силы, то она, въ строгомъ принятіи, бываетъ не одинакова въ разныхъ разстояніяхъ отъ экватора и въ разныхъ удаленіяхъ отъ центра земли. Но какъ количества, на которыя она въ разныхъ разстояніяхъ отъ экватора разнится, весьма малы, то въ настоящемъ случаѣ не могутъ быть уважаемы, равно какъ и уменьшеніе ея при удаленіи, отъ центра земли; ибо перемѣна силы должна сдѣлаться чувствительною на гораздо большихъ высотахъ или глубинахъ, нежели на какія мы въ состояніи вознестися, или опуститься. И такъ мы можемъ принимать здѣсь тяжесть за такую силу, которая повсюду одинакова, то есть, повсюду побуждаетъ тѣла упадать въ одно время на одинакое количество.

Должно почитать эту силу дѣйствующею одинаково въ каждое мгновеніе времени на каждую часть матеріи. Но какъ само по себѣ разумѣется, что цѣлое тѣло, въ которомъ каждая часть получаетъ одинакую скорость, должно двигаться также скоро, какъ и отдѣльная часть его; то слѣдуетъ заключить, что скорость, происходящая отъ тяжести какой нибудь массы, не зависитъ отъ величины ея; она бываетъ одинакова

какъ въ большой, такъ и въ малой массѣ. Хотя извѣстно по наблюденіямъ, что тѣла разной величины, пущенныя съ одной высоты, не упадаютъ всѣ въ одно время; но этому причиною, какъ мы увидимъ послѣ, воздухъ; ибо тѣжъ наблюденія доказываютъ, что тѣла, пущенныя въ пространствѣ, лишенномъ воздуха, какъ бы ни были различны въ массахъ своихъ, падаютъ всѣ въ одно время.

Надобно различать здѣсь дѣйствіе тяжести отъ вѣсу. Дѣйствіе тяжести побуждаетъ каждую часть матеріи или передаетъ ей извѣстную силу, которая отнюдь не зависитъ отъ числа матеріальныхъ частей. Но вѣсъ бываетъ всегда равенъ сопротивленію, полагаемому для остановленія тяжести нѣкоторой массы. Это дѣйствіе зависитъ отъ двухъ вещей, именно, отъ скорости, которую тяжесть старается передать каждой части, и отъ числа частей, возбуждаемыхъ ею. А какъ скорость, передаваемая тяжестію, бываетъ всегда одинакова для каждой части матеріи, то сопротивленіе, какое нужно для остановленія этого дѣйствія, должно быть пропорціонально числу частей матеріи, то есть, самой массѣ. Слѣд. *вѣсъ зависитъ отъ массы, а тяжесть отнюдь не зависитъ отъ нее.* Сіе

наблюденіе, касающееся до вѣсу тѣлъ, служитъ основаніемъ тому правилу, коимъ мы предупредили (160), что масса бываетъ всегда пропорціональна вѣсу.

172. Сдѣлавъ объясненія на тяжесть, приступимъ къ законамъ движенія тяжелыхъ тѣлъ.

Поелику тяжесть дѣйствуетъ безпрерывно и одинаково во всякомъ разстояніи отъ поверхности земной (разумѣется, во всякомъ такомъ разстояніи, до какого мы способны вознестися); то слѣдуетъ заключить, что тяжесть есть сила постоянно прибывающая, которая въ каждое мгновеніе передаетъ движимому новую степень скорости, и сія скорость бываетъ всегда одинакова въ каждое равное мгновеніе; такъ что пріобрѣтаемыя имъ скорости (163 и слѣд.) увеличиваются въ равномъ содержаніи съ протекшими временами; проходимыя пространства бываютъ пропорціональны квадратамъ временъ или квадратамъ скоростей; скорости квадратнымъ корнямъ изъ проходимыхъ пространствъ; словомъ, все, что сказали мы о постоянно ускорительныхъ силахъ, можно примѣнить здѣсь къ тяжести, съ исключеніемъ сопротивленія воздуха и всякаго другаго препятствія.

И такъ для опредѣленія временъ, пространствъ и скоростей въ движеніи тяжелыхъ тѣлъ, надобно знать одно какое нибудь дѣйствіе тяжести въ опредѣленное время. Ибо по уравненіямъ $u = pt$ и $e = \frac{pt^2}{2}$ мы можемъ опредѣлить всѣ сіи предметы, какъ скоро извѣстна будетъ величина p.

Припомнимъ, что чрезъ p разумѣли мы (166) такую скорость, какую движимое получаетъ по истеченіи одной секунды времени. Но изъ опыту извѣстно, (а какъ онъ найденъ, то увидимъ ниже), что тѣло, коему воздухъ не дѣлаетъ чувствительнаго препятствія, опускается на 15 и $\frac{1}{10}$, или правильнѣе на 15,098 футовъ въ первую секунду своего паденія.

Сверхъ того видѣли мы (165), что движимое получивъ приращенія скорости, описываетъ послѣ единообразнымъ движеніемъ двойное пространство въ тоже время. Слѣд. скорость, какую пріобрѣтаетъ тяжелое тѣло въ первую секунду своего паденія, бываетъ такова, что, естьли бы тяжесть перестала дѣйствовать, она должна описывать двойное число $15\frac{1}{10}$ футовъ, то есть, $30^{ф},2$ въ каждую послѣдующую секунду. Слѣд $p = 30,2$.

173. Теперь изъ уравненій $u = pt$ и $e = \frac{pt^2}{2}$, первое показываетъ намъ, что для опредѣленія скорости, какую пріобрѣтаетъ тяжелое тѣло при паденіи въ число t секундъ, должно умножить полученную имъ скорость въ первую секунду на число t секундъ.

Слѣд. *пріобрѣтенная скорость тѣломъ, падающимъ нѣкоторое число секундъ, бываетъ такова, что естьли бы тяжесть перестала дѣйствовать, она бы должна описать пространство столькихъ 30ф,2, сколько протечетъ секундъ.*

На примѣръ тѣло, употребившее 7 секундъ на паденіе, движется послѣ въ каждую секунду, не получая больше новаго приращенія, со скоростью въ семеро больше 30ф,2, или со скоростью $211\frac{2}{5}$ футовъ.

174. Второе уравненіе $e = \frac{pt^2}{2} = \frac{1}{2}pt^2$ показываетъ, что для опредѣленія пространства или высоты e, съ которой тяжелое тѣло упадаетъ въ число t секундъ, должно умножить $\frac{1}{2}p$, то есть, количество, которое оно описываетъ въ первую секунду, на квадратъ протекшаго числа секундъ.

Слѣд. *высота, съ которой тяжелое тѣло падаетъ въ число* t *секундъ, состоитъ изъ столькихъ* $15\frac{1}{10}$ *футовъ, сколь-*

ко находится единицъ въ квадратѣ тогожъ числа секундъ.

Напримѣръ естьли тѣло употребитъ 7 секундъ на паденіе, коему воздухъ не дѣлаетъ сопротивленія, то можно увѣриться, что оно пало съ высоты, равной близу 740 футовъ, то есть, съ высоты, состоящей изъ 15ф, і умноженныхъ на 49. И такъ явствуетъ теперь, что по одному протекшему времени можно опредѣлить какъ пріобрѣтенную скорость, такъ и пройденное пространство.

175. Естьли пожелаемъ узнать, сколько времени употребило тѣло на паденіе съ извѣстной высоты, то по уравненію $e = \frac{1}{2} pt^2$ найдемъ $t^2 = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, и слѣд. $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$; то есть, надобно сыскать, сколько эта высота e содержитъ въ себѣ высоту $\frac{1}{2}p$, съ которой тяжелое тѣло падаетъ въ первую секунду, и потомъ извлечь квадратной корень изъ сего числа разъ.

176. Естьли захотимъ узнать, съ какой высоты должно упасть тѣло для пріобрѣтенія извѣстной скорости, то есть, такой скорости, съ которою оно можетъ описывать однообразно извѣстное число футовъ въ секунду; то должно по уравненію $u = pt$, найти величину t, именно $t = \frac{u}{p}$, и вставить ее въ уравненіи $e = \frac{1}{2} pt^2$, отъ чего произойдетъ $e = \frac{1}{2} p \times \frac{u^2}{pp} = \frac{u^2}{2p}$; отсюда

заключаемъ, *что для опредѣленія высоты, съ которой тяжелое тѣло упадая, пріобрѣтаетъ скорость и извѣстнаго числа футовъ въ секунду, должно раздѣлить квадратъ сего числа футовъ на удвоенную скорость, которую получаетъ тяжелое тѣло по прошествіи первой секунды, то есть, на* 60,4.

На примѣръ желая знать, съ какой высоты должно упасть тяжелое тѣло для пріобрѣтенія скорости 100 футовъ въ секунду, раздѣлю квадратъ изъ 100, то есть, 10000 на 60,4; частное покажетъ, что оно должно упасть съ высоты равной $165\frac{1}{2}$ футамъ.

Такимъ же образомъ поступать должно при опредѣленіи, какой высоты достигаетъ тѣло, брошенное вертикально съ извѣстною скоростію.

177. Поелику мы теперь въ состояніи, какъ то видно изъ предыдущихъ примѣровъ, опредѣлять всѣ обстоятельства, касающіяся до движенія тяжелыхъ тѣлъ, то къ симъ же движеніямъ относятся вообще и всѣ прочія; не рѣдко случается, что мы, вмѣсто скорости тѣла, даемъ непосредственно высоту, съ которой оно упадая пріобрѣло ее по дѣйствію своей тяжести. Мы будемъ имѣть случай видѣть это на самой практикѣ.

Замѣтимъ еще для повторенія, что всѣ обстоятельства увеличивающагося въ скорости движенія, и слѣд. движенія тяжелыхъ тѣлъ заключаются въ двухъ уравненіяхъ $u = pt$, и $e = \frac{1}{2} pt^2$; такъ что по извѣстной величинѣ p и какой нибудь одной изъ слѣдующихъ, то есть, времени, пространства или скорости, бываемъ всегда въ состояніи находить двѣ прочія или непосредственно по одному уравненію, или чрезъ совокупленіе обоихъ, какъ показано было (176).

О Движеніяхъ всячески измѣняемыхъ.

178. Когда движимое тѣло бываетъ подвержено такой силѣ, которая дѣйствуетъ на него безпрерывно, но разнымъ образомъ въ каждое мгновеніе, тогда движеніе его называется вообще *перемѣннымъ*. Примѣры перемѣннаго движенія замѣчаемъ въ отпущеніи пружинъ (ressorts); хотя скорость въ такомъ случаѣ увеличивается, однако степени, по которымъ она увеличивается, идутъ уменьшительно. То же самое случается со степенями скорости, по которымъ движеніе корабля приходитъ къ единообразности: дѣйствіе вѣтра на парусы уменьшается по мѣрѣ того, какъ судно пріобрѣтаетъ больше ходу; потому что оно тѣмъ больше убѣгаетъ отъ дѣйствія вѣтра, чѣмъ начинаетъ итти скоpѣе.

179. Правила, нужныя для опредѣленія обстоятельствъ этихъ движеній, выводимъ изъ предписанныхъ нами для движеній однообразныхъ и движеній однообразно увеличивающихся въ скорости, разсуждая такъ: 1е. какимъ бы перемѣнамъ не было подвержено движеніе, но относя его къ безконечно малымъ мгновеніямъ, можно всегда предположить, что скорость его не измѣняется въ теченіи сего безконечно краткаго мгновенія. Когда же скорость бываетъ однообразна; тогда она имѣетъ себѣ выраженіемъ описанное ею пространство во время t, раздѣленное на тожъ самое время.

Слѣд. естьли однообразность скорости продолжается на одно мгновеніе, то она должна имѣть выраженіемъ себѣ безконечно малое пространство, описанное въ то мгновеніе, раздѣленное на негожъ. Почему представивъ чрезъ e пространство, описанное перемѣннымъ движеніемъ въ какое нибудь время t, получимъ въ de то, что должно быть описано единообразно въ мгновеніе dt; и слѣд. $u = \frac{de}{dt}$, или $de = udt$ *служитъ первымъ фундаментальнымъ уравненіемъ для перемѣнныхъ движеній.*

180. 2е. Изъ уравненія $u = pt$, найденнаго (166), и изображающаго содержаніе

скоростей къ временамъ въ движеніяхъ однообразно возрастающихъ, выводимъ $p = \frac{u}{t}$; а это значитъ: естьли ускорительная сила, или лучше количество p, которымъ она измѣряется (170), бываетъ постоянна, то эта сила получаетъ выраженіемъ скорость u, которую производитъ въ извѣстное время t, раздѣленную на тожъ время t. Слѣд. естьли сила p будетъ дѣйствовать разно по мгновеніямъ, то есть, ежели она будетъ постоянна на одно только мгновеніе, то должна въ такомъ случаѣ изобразиться чрезъ скорость, которую производитъ она въ то мгновеніе, раздѣленную на негожъ; то есть, она должна изобразиться приращеніемъ скорости, раздѣленнымъ на приращеніе времени. Отсюда выходитъ $p = \frac{du}{dt}$ *второе фундаментальное уравненіе для перемѣнныхъ движеній*.

181. Въ уравненіи $u = pt$ разумѣли мы (166) чрезъ p такую скорость, которую ускорительная сила передаетъ движимому въ опредѣленное время (какъ на примѣръ въ въ одну секунду) продолжительнымъ и всегда равнымъ дѣйствіемъ. Въ уравненія $du = pdt$ должно разумѣть тоже.

Но надобно замѣтить, что естьли эта сила предположена будетъ перемѣнною, то количество p, представляющее скорость, которую она способна дать, дѣйствуя наподобіе ускорительной силы постоянной въ продолженіи секунды, будетъ различно во всѣ мгновенія движенія. Ибо естьли увеличивающаяся сила начнетъ уменьшаться, то не трудно понять, что скорость, которую она способна была произвести въ секунду дѣйствіемъ, равно передаваемымъ въ каждое мгновеніе той секунды, должна сокращаться; и на оборотъ.

182. Изъ двухъ уравненій $de = udt$ и $du = pdt$ можно вывести третіе, которое не меньше тѣхъ полезно: вотъ оно.

По уравненію $de = udt$ нахожу $dt = \frac{de}{u}$; вставливаю эту величину въ $du = pdt$, и по приведеніи получаю $pde = udu$.

183. Замѣтимъ, что въ разсужденіи нашемъ, по которому дошли мы до уравненія $du = pdt$ (180) принимали мы скорость увеличивающеюся; когдажъ она будетъ умаляющеюся, то должно (21) вмѣсто du полагать $-du$; въ сходственность чего два уравненія $du = pdt$ и $pde = udu$ должны изобра-

зиться такъ $\pm du = pdt$ и $pde = \pm udu$; верхній знакъ служитъ для возрастающаго движенія, а нижній для умаляющагося.

184. Есть четвертое уравненіе, которое выводится изъ двухъ первыхъ, именно такое.

Изъ уравненія $de = udt$ выходитъ $u = \frac{de}{dt}$ слѣд. $du = d\left(\frac{de}{dt}\right)$; по вставкѣ этой величины въ уравненіи $pdt = \pm du$, получаемъ $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Естьли предположимъ, (что мы сдѣлать вольны) dt постояннымъ, то $pdt = \pm \frac{dde}{at}$, или $pdt^2 = \pm dde$. Но надобно твердо помнить, что въ этомъ уравненіи dt предполагается постояннымъ количествомъ. Когдажъ dt принято будетъ перемѣннымъ, тогда употребляется уравненіе $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Мы покажемъ употребленіе этихъ формулъ во многихъ случаяхъ; а теперь припомнимъ еще, что количество p, заключающееся въ нихъ, изображаетъ такую скорость, которую ускорительная сила способна дать движимому въ каждое мгновеніе

извѣстнаго времени, на примѣръ секунды; дѣйствуя наподобіе увеличивающейся силы постоянно; и поелику это количество *p* измѣряетъ въ каждое мгновеніе особое дѣйствіе оной силы, то для сокращенія рѣчи дадимъ ему тоже названіе.

О Равновѣсіи силъ, противоположныхъ въ прямой линеѣ.

185. Мы приступаемъ теперь разсматривать движеніе тѣла, подверженнаго такой силѣ, которая дѣйствуетъ на него по прямой линеѣ. Но мы еще не упоминали, какимъ образомъ движеніе переходитъ въ движимое; этотъ предметъ немаловаженъ, и потому должно бы начать съ него; но какъ законы сообщеннаго движенія зависятъ отъ законовъ равновѣсія, что мы увидимъ ниже, то мы за нужное почитаемъ сперва занятся сими послѣдними. Въ настоящемъ случаѣ рѣчь будетъ итти объ одномъ равновѣсіи силъ, провуположныхъ въ прямой линеѣ.

Мы будемъ представлять силы, какъ и прежде, чрезъ ихъ дѣйствія, то есть, каждую изъ нихъ количествомъ движенія опредѣленной массы. А дабы не обнимать вдругъ многихъ предметовъ, то будемъ принимать каждую массу одною точкою, коей дадимъ

количество матеріи самаго тѣла. Мы увидимъ со временемъ, что во всѣхъ тѣлахъ находится дѣйствительно такая точка, чрезъ которую движеніе переходитъ, какъ бы вся масса въ ней сосредоточивалась. Къ томужъ мы будемъ принимать тѣла (по крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока о томъ не предувѣдомимъ) состоящими изъ частей совершенно твердыхъ и соединенныхъ между собою такъ, что никакое дѣйствіе силы неспособно перемѣнить видимаго ихъ положенія.

186. По предположеніи сего, вообразимъ (*фиг.* 27) двѣ движущіяся массы *M* и *m*: первую отъ *A* къ *C* со скоростію *V*, а вторую отъ *C* къ *A* со скоростію *u*; массы сіи ударившись одна объ другую, должны сдѣлать равновѣсіе, когда количество движенія *M* будетъ равно количеству движенія *m*; то есть, когда (*фиг.* 158) $MV = mu$.

Въ самомъ дѣлѣ естьли массы *M* и *m* равны, и скорости ихъ *V* и *u* одинаковы, то безъ сомнѣнія должно произойти равновѣсію; потому что тажъ причина, по которой дадимъ верхъ *M* надъ *m*, заставитъ насъ дать преимущество послѣдней надъ первою; ибо все въ обѣихъ массахъ равно.

Положимъ теперь, что M вдвое больше m, и напротивъ V вдвое меньше u; на примѣръ, M проходитъ одинъ футъ въ секунду, а m два фута. Послѣ чего можно принимать безъ всякаго сомнѣнія массу M, состоящею изъ двухъ равныхъ m, а тѣло m имѣющимъ двѣ футовыя скорости въ секунду. Слѣд. можно вообразить, что во время сраженія масса m теряетъ одну изъ скоростей своихъ противу равной части оной въ M, а другую противъ равной остальной.

Напослѣдокъ полагая массы M и m и скорости ихъ V и u во всякомъ другомъ содержаніи, можно почитать большую массу раздѣленною на нѣсколько другихъ, равныхъ меньшой массѣ, изъ которыхъ каждая истребляетъ въ меньшой скорость равную своей. Отсюда выходитъ слѣдующее общее правило.

ГЛАВНОЕ ПРАВИЛО. *Два тѣла, дѣйствующія взаимно другъ на друга по линеямъ прямо противуположнымъ, производятъ равновѣсіе тогда, когда количества ихъ движенія бываютъ равны;* то есть, когда произведеніе массы одного на скорость его равно произведенію массы другаго на скорость движенія сего послѣдняго.

Это предложеніе имѣетъ свою силу вообще, будутъ ли два тѣла дѣйствовать сами по себѣ другъ на друга, или посредствомъ линеи Mm не имѣющей никакой гибкости и массы, или наконецъ увлекаемы будутъ въ противныя стороны посредствомъ невытягаемой проволоки Mm. И напротивъ, естьли два тѣла сдѣлаютъ равновѣсіе, то должно заключить, что количества движеній ихъ противоположныхъ прямо равны.

187. Ежели три тѣла или больше M, m, m' и проч. (*фиг.* 28) двигаясь или стремясь къ движенію по одной линеѣ со скоростями V, u, u' и проч. сдѣлаютъ равновѣсіе; то должно допустить, что сумма количествъ движенія, дѣйствующихъ въ одну сторону, равна суммѣ количествъ движенія дѣйствующихъ въ противную.

Ибо при случившемся равновѣсіи можно предположить всегда, что тѣло m изъ двухъ M и m стремящихся къ одной сторонѣ, истребляетъ одну часть движенія тѣла m', а M другую. И такъ принявъ x за скорость, какую m' теряетъ чрезъ дѣйствіе m, получимъ $m'x$ количество лишеннаго имъ движенія; слѣд. будемъ имѣть $mu = m'x$; а поелику тѣло M должно уничтожить въ томъ же m' остальное количество движенія его, именно $m'u' - m'x$, и потому $MV = m'u' - mx$; или по причинѣ, что $m'x = mu$, выходитъ $MV = m'u' - mu$, то есть, $MV + mu = m'u'$.

О сложномъ Движеніи.

188. Мы намѣрены предположить еще, что силы, о которыхъ будемъ разсуждать въ этой статьѣ, передаются массамъ, сосредоточеннымъ въ одной точкѣ.

Сложнымъ движеніемъ называется то, которое происходитъ отъ многихъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло по произвольнымъ направленіямъ.

Естьли тѣло *M* двигаясь по прямой линеѣ *AB* (*фиг.* 29), получитъ по пришествіи своемъ въ точку *M* ударъ по линеѣ *MD* перпендикулярной къ *AB*; то этотъ ударъ не произведетъ въ немъ другаго дѣйствія, кромѣ что отдалитъ его отъ линеи *AB*; онъ не можетъ ни прибавить, ни убавить прежней скорости перпендикулярнаго движенія его отъ линеи *CD*.

Поелику направленіе *CD* перпендикулярно къ *AB*, то должно заключить, что сила, дѣйствующая по *CD*, не можетъ передать скорости тѣлу ни въ правую, ни въ лѣвую сторону той линеи; а тѣмъ болѣе не можетъ передать оной въ обѣ стороны вдругъ.

Тожъ заключеніе имѣетъ силу, когда тѣло *M* двигаясь по *CD* получитъ ударъ по *MB*; сія послѣдняя сила не прибавитъ и не отнимоетъ ничего у той скорости, съ какою тѣло *M* стремилось удалиться отъ *MB*.

189. ГЛАВНОЕ ПРАВИЛО. *Естьли двѣ силы P и Q* (фиг. 30), *коихъ направленія составляютъ прямой уголъ, дѣйствуютъ въ одно мгновеніе на движимое M, изъ которыхъ сила Q такова, что одна мгновеннымъ своимъ дѣйствіемъ способна перенести движимое на разстояніе MB въ опредѣленное время, на примѣръ въ секунду, а сила P въ тожъ время на разстояніе MD; то утверждаю, что движимое по совокупчому дѣйствію двухъ этихъ силъ опишетъ въ означенное время діагональ ME параллелограмма DMBE, которому служатъ боками тѣжъ разстоянія MB и MD.*

Поелику обѣ силы дѣйствуютъ въ одно мгновеніе на тѣло, то можно предположить, что сила *Q* перпендикулярная къ *PD* стала дѣйствовать на него тотчасъ, какъ оно двигаясь по линеѣ *PD* пришло въ точку *M*; но по изъясненному (188) эта сила *Q* не можетъ ни прибавить, ни убавить скорости его, которую оно получило для удаленія отъ *QB*; слѣд. прочертивъ изъ точки *D* линею *DE* параллельную съ *MB*, должно заключить, что движимое по истеченіи секунды будетъ находиться на какой нибудь точкѣ линеи *DE*, потому что всѣ точки

этой линеи удалены отъ QB на количество равное MD.

Естьли проведемъ изъ точки B линею BE параллельную съ PD, то по тойже причинѣ увѣряемся, что тѣло по истеченіи секунды должно находиться на какой нибудь точкѣ линеи BE; но какъ нѣтъ кромѣ E другой точки, общей обѣимъ линеямъ DE и BE; слѣд. движимое въ концѣ секунды должно находиться въ E.

Явствуетъ притомъ (150), что какую бы дорогу ни получило движимое по мгновенному на него дѣйствію двухъ силъ, но оно должно итти всегда по прямой линеи, потому что по совершеніи дѣйствія движимое остается свободнымъ. А какъ этотъ путь долженъ пролегать чрезъ M и E, то долженъ состоять изъ ME, то есть, изъ діагонали параллелограмма $DMBE$.

Прибавимъ къ тому же, что движимое описываетъ ME однообразнымъ движеніемъ; ибо не посредственно послѣ совокупнаго дѣйствія двухъ силъ, оно остается свободнымъ (150).

190. Поелику двѣ силы P и Q, дѣйствуя совокупно на движимое, заставляютъ его описывать діагональ ME, то заключимъ 1ᵉ что

вмѣсто двухъ силъ, коихъ направленія составляютъ прямой уголъ, можно принимать одну, лишь бы эта одна сила способна была дать тѣлу движеніе на разстояніе діагонали такого прямоугольника, котораго бока описываются въ одинакое время дѣйствіемъ каждой порознь силы.

Единственная сила *ME*, которую производятъ двѣ другія *MB* и *MD*, называется *составною* или *сложною*.

Поелику линеи *MB* и *MD* представляютъ дѣйствія каждой силы *Q* и *P* порознь, а *ME* дѣйствіе обѣихъ вмѣстѣ, то можно принимать всегда *MB*, *MD* и *ME* за выраженіе самихъ силъ.

2ᵉ. Можно почитать также всякую единственную силу *ME* результатомъ двухъ другихъ *MB* и *MD*, которыхъ направленія составляютъ прямой уголъ; лишь бы первая изображалась діагональю *ME*, а послѣднія двѣ боками *MB* и *MD* одного и тогожъ параллелограмма. Слѣд. можно за одну силу *ME* принимать двѣ *MB* и *MD*, потому что эти послѣднія производятъ совокупно одну *ME*.

191. Вообще *какой бы уголъ ни дѣлали между собою направленія двухъ силъ* *P*,

и Q (фиг. 31 и 32), дѣйствующихъ въ одно время на движимое M; но это движимое должно описать діагональ ME параллелограмма DMBE, котораго бока означатъ на направленіяхъ оныхъ силъ дѣйствія каждой порознь; оно должно описать притомъ діагональ сію во столькожъ времени, во сколько бы оно описало одинъ изъ боковъ параллелограмма по дѣйствію приличной ему силы.

Для доказательства проведемъ изъ точки *M* линею *FMH* перпендикулярно къ діагонали *ME*, потомъ изъ точекъ, *D* и *B* линеи *DF*, *BH* параллельно, а линеи *DG*, *BI* перпендикулярно къ той же діагонали. Вмѣсто силы *P*, которая изображается діагональю *MD* прямоугольнаго параллелограмма *FMGD*, можно принять (190) двѣ *MF* и *MG*. По той же причинѣ можно принять вмѣсто силы *Q*, представленной діагональю *MB* прямоугольнаго параллелограмма *MHBI*, двѣ другія *MH* и *MI*. Слѣд. вмѣсто двухъ силъ *P* и *Q* можно принять четыре *MF*, *MG*, *MH*, *MI*; и сіи послѣднія должны имѣть такую же составную силу, какую двѣ первыя. Но изъ этихъ четырехъ силъ двѣ *MH* и *MF* не способствуютъ ни въ чемъ составной, потому что онѣ дѣйствуютъ по

противоположнымъ направленіямъ, и притомъ равны между собою. Ибо два треугольника DGM, EIB равны по свойству параллелограмма; слѣд. $DG = BI$, и $MF = MH$.

Что касается до двухъ силъ MI, MG, имѣющихъ направленія по одной линеѣ, то происходящее отъ нихъ дѣйствіе должно состоять изъ суммы двухъ другихъ MG, MI (*фиг.* 31), потому что эт̃ѣ силы дѣйствуютъ въ одну сторону; или должно состоять изъ ихъ разности (*фиг.* 32), потому что онѣ дѣйствуютъ въ противныя стороны. А какъ треугольникъ EIB равенъ треугольнику DGM, то (*фиг.* 31) $MI + MG = MI + EI = ME$, а (*фиг.* 32) $MI - MG = MI - EI = ME$; слѣд. четыре силы MF, MH, MG, MI, и двѣ MD, MB имѣютъ одно дѣйствіе съ ME, діагональю параллелограмма $DMBE$, котораго бобока MB, MD представляютъ двѣ силы Q и P.

192. Мы представляли обѣ силы P и Q (*фиг.* 30, 31 и 32) чрезъ линеи MD и MB, которыя движимое M по ихъ дѣйствію или по сообщеннымъ ими скоростямъ описываетъ въ одинакое время; хотя по изъясненному (158), настоящею мѣрою силъ должно быть количество произведеннаго ими движенія. Но

какъ количества движеній (159) содержатся въ равныхъ массахъ пропорціонально скоростямъ, что допускаемъ и въ настоящемъ случаѣ; то можно всегда принимать скорости MD, MB за самыя силы.

Но естьли даны будутъ не скорости двухъ силъ P и Q, а количества сообщеннаго ими движенія извѣстнымъ массамъ, то должно принимать MD и MB въ содержаніи этихъ количествъ. На примѣръ, естьли мнѣ силы P и Q будутъ извѣстны по такому свойству, что сила P способна дать массѣ m скорость u, а сила Q массѣ m' скорость u', то я долженъ заключить, что $MD : MB = mu : m'u'$; а какъ первая сила P, способная произвести количество движенія mu, передаетъ движимому скорость $\frac{mu}{M}$ (158), по той же причинѣ вторая Q передаетъ ему скорость $\frac{m'u'}{M}$; то должно принимать $MD : MB = \frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M}$; но $\frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M} = mu : m'u'$; слѣд. должно почитать $MD : MB$ въ содержаніи количествъ движенія, измѣряющихъ силы P и Q.

Это заключеніе полезно для сравненія дѣйствій разныхъ силъ, передаваемыхъ разнымъ движимымъ.

Главное предложеніе доказанное (191), весьма полезно; все, о чемъ будемъ говорить ниже, основывается на немъ.

193. И такъ слѣдуетъ изъ всѣхъ разсужденій нашихъ, что можно безъ различія принимать тѣло, побуждаемымъ къ движенію или совокупнымъ дѣйствіемъ двухъ силъ *MB*, *MD* (*фиг.* 31 и 32), которыя составляютъ между собою произвольной уголъ, или единственною силою, которую представляетъ діагональ *ME*.

И на оборотъ можно почитать за одно дѣйствіе движенія, когда тѣло будетъ побуждаемо къ тому единственною силою *ME* или двумя, изображенными въ бокахъ параллелограмма, которому первая служитъ діагональю. На примѣръ, тѣло проходя въ одну секунду изъ *M* въ *E* однообразнымъ движеніемъ, или двигаясь по линеѣ *MB* такъ, что въ тожъ время, какъ оно протекаетъ ее въ секунду, линея эта переноситса параллельно сама къ себѣ по *MD* въ секунду же времени; тѣло, говорю я, въ обоихъ случаяхъ описываетъ одну и тужъ линею *ME*.

194. Двѣ силы *MB* и *MD*, сообщенныя въ одной точкѣ *M*, должны по необходимости находиться въ одной плоскости

(*Геом.* 177). А какъ притомъ составная изъ нихъ сила изображается діагональю *ME*, которая лежитъ въ плоскости параллелограмма, то должно заключить вообще, что *двѣ силы, которыя встрѣчаются одна съ другою въ общей точкѣ, находятся въ одной плоскости съ составною изъ нихъ.*

О Составленіи и Раздѣленіи Силъ.

195. По изъясненному правилу (193 и 194) не только можно приводить двѣ силы въ одну, или раздѣлять одну на двѣ другія; но можно также вообще приводить въ одну столько силъ, сколькобъ ихъ числомъ ни было, лишь бы всѣ онѣ находились въ одной плоскости, или стекались въ одну точку. И напротивъ можно раздѣлять одну или многія силы на произвольное число другихъ.

196. Но прежде нежели покажемъ, какъ до этого доходить, должно примѣтить, что сила *P* (*фиг.* 33) отталкивая тѣло или притягивая его къ себѣ, дѣйствуетъ одинаково, какое бы направленіе она ни получила.

На примѣръ дѣйствіе остается одинаково; будетъ ли сила *P* тянуть къ себѣ тѣло *C* точкою *P* посредствомъ незгибаемаго и безъ массы прута или точкою *A*, или *B* или *C*, или станетъ отталки-

вать то тѣло всякою другою точкою D, которая находится на поверхности его. Дѣйствіе остается, говорю я, одинаково, пока оно будетъ проходить по одному направленію. Разстояніе не можетъ имѣть вліянія прежде, пока дѣйствіе силы не будетъ передано посредствомъ какого нибудь орудія, на примѣръ рычага или каната, коихъ масса раздѣляетъ дѣйствіе силы; но мы здѣсь это исключаемъ.

Почему естьли двѣ силы P и Q (*фиг.* 34), имѣющія направленіе въ одной плоскости по линеямъ AQ, BP, станутъ тянуть или отталкивать тѣло двумя точками A и B; то это тѣло будетъ побуждаемо къ движенію, какъ бы двѣ силы влекли его по точкѣ стеченія ихъ I, сохраняя прежнее свое направленіе.

По предвареніи сего приступимъ къ составленію и раздробленію силъ.

197. Положимъ, что четыре силы P, Q, R, S (*фиг.* 35) имѣютъ направленіе по линеямъ OP, AQ, BR, TS въ одной плоскости. Продолжимъ умственно направленіе PO до тѣхъ поръ, пока оно пересѣчется съ AQ въ точкѣ A, и допустимъ, что AD, AE представляютъ пространства, которыя описываетъ движимое по дѣйствію этихъ силъ P и Q въ опредѣленное время, на примѣръ въ секунду; въ сходственность чего естьли сдѣлаемъ параллелограммъ $AEID$, то діагональ его AI изобразитъ (191) совокуп-

ное дѣйствіе двухъ силъ *P* и *Q*; и слѣд. можетъ одна замѣнить ихъ.

Вообразимъ теперь, что продолженіе *AI* встрѣчается съ направленіемъ *BR* силы *R* въ точкѣ *B*, и что *BM* сдѣлано равно *AI*; естьли возьмемъ *BF* за пространство, какое сила *R* заставляетъ тожъ движимое описывать въ одну секунду, то положивъ силу *AI* перенесенною въ *B*, по причинѣ равенства *BM* съ *AI* должно заключить, что изъ взаимнаго ея дѣйствія съ силою *R* родится новая составная, которую изображаетъ на фигурѣ діагональ *BG* параллелограмма *BMGF*; слѣд. эта сила замѣнитъ силу *R* и силу *AI*, то есть, замѣнитъ три силы *R*, *Q* и *P*.

Наконецъ представимъ себѣ, что продолженіе *BG* пересѣкаетъ направленіе *TS* силы *S* въ точкѣ *C*, и притомъ $CK = BG$; положимъ, что по дѣйствію силы *S* предыдущее тѣло описываетъ пространство *CH* въ одну секунду; тогда вообразивъ силу *BG* перенесенною въ *C* по *CG*, и представивъ ее, какъ мы уже допустили, чрезъ *CK*, заключимъ равномѣрно, что изъ взаимнаго дѣйствія этой силы съ силою *S* выходитъ новая единственная, которую на фигурѣ из-

ображаетъ діагональ CN параллелограмма $CHNK$. Эта сила замѣняетъ силу S и силу CK или BG; слѣд. она равняется четыремъ силамъ P, Q, R, S; и слѣд. она почитается за составную изъ нихъ.

Отсюда явствуетъ, какъ должно приводить всякое число силъ въ одну, когда онѣ будутъ направлены въ одной плоскости.

198. Этотъ же примѣръ научаетъ насъ вставливать вмѣсто одной силы произвольное число другихъ, и показываетъ, какую зависимость должны имѣть сіи послѣднія.

На примѣръ вмѣсто единственной силы BG (фиг. 35) можно, начертивъ параллелограммъ $BFGM$, которому GB служитъ діагональю, принять двѣ силы, изображенныя чрезъ BF и BM. А какъ можно вообразить каждую изъ этихъ силъ перенесенною въ такую точку ихъ направленія, въ какую угодно, то можно перенести BM въ AI, (точка A предполагается здѣсь въ произвольномъ разстояніи отъ B); и сдѣлать на AI другой параллелограммъ $AEID$; тогда силу AI будутъ замѣнять двѣ другія, изображенныя чрезъ AE и AD; такимъ образомъ вмѣсто единственной силы BG можно принять три BF, AE и AD, которыя произведутъ одинакое съ нею дѣйствіе.

199. Замѣтимъ, что опредѣляя силы AD, AE боками параллелограмма $ADIE$, которому AI служитъ діагональю, можно это сдѣлать разными и безчисленными обра-

зами; а какъ параллелограммъ *ADIE* можетъ находиться въ плоскости параллелограмма *FBMG*, или во всякой другой, то можно раздѣлять всякую силу *BG* на произвольное число другихъ, находящихся въ такихъ плоскостяхъ, въ какихъ будетъ угодно.

Мы увидимъ послѣ употребленіе составленій и раздѣленій силъ.

200. Изъ предыдущаго примѣра раздѣленія одной силы на многія явствуетъ, что можно въ случаѣ надобности заставить нѣкоторыя силы проходить чрезъ извѣстныя точки, и сдѣлать ихъ данной величины и параллельными съ извѣстными другими линеями; словомъ, помощію раздѣленія можно выполнить всегда нѣкоторыя требуемыя условія.

На примѣръ, естьли бы вмѣсто силы, представленной линеею *AB* (*фиг.* 36), надобно было вставить двѣ другія, изъ которыхъ бы одна проходя чрезъ данную точку *O*, была параллельна въ положеніи своемъ съ данною линеею *ST* и притомъ равной величины съ *SK*; то есть, такая, помощію которой бы движимое описывало разстояніе *SK* въ тоже самое время, въ какое сила, представленная чрезъ *AB*, приводитъ его въ состояніе описывать линею *AB*; то вотъ какимъ образомъ такое требованіе можно выполнить по предыдущимъ правиламъ.

Проведи чрезъ точку *O* линею *OV* параллельную съ *ST*, пересѣкающую *AB* въ какой нибудь точкѣ *V*. Сдѣлай $VR = SK$, и $VQ = AB$; потомъ со-

единивъ точки R и Q линеею RQ, проведи изъ V параллельную къ ней VH, которую пересѣки въ H линеею QH параллельною съ VR; линея VR представитъ искомую силу, а VH такую, которая совокупно съ VR замѣнитъ VQ или AB.

Можно рѣшить сей вопросъ и тогда, когда ST будетъ параллельна съ AB; но какъ въ такомъ случаѣ поступать, это увидимъ ниже.

201. Замѣтимъ здѣсь, что поелику двѣ силы P и Q (*фиг.* 31 и 32), употребляемыя къ составленію, изображаются боками MD и MB параллелограмма $DMBE$, то составная изъ нихъ должна по необходимости изобразиться діагональю ME того же параллелограмма; слѣд. представивъ чрезъ R составную силу, получимъ $P : R = MD : ME$, и $Q : R = MB : ME$, то есть, $P : Q : R = MD : MB : ME$, или (по причинѣ $MD = BE$) $= BE : MB : ME$. Притомъ же въ треугольникѣ MBE выходитъ (*Геом.* 303) $ME =$ *син.* BME : *син.* BEM : *син.* MBE, или по причинѣ, что параллельныя BE и MD дѣлаютъ уголъ $BEM = DME$ и что уголъ MBE дополненіе угла BMD, будетъ имѣть (*Геом.* 279) *син.* $MBE =$ *син.* BMD; слѣд. $BE : MB : ME =$ *син.* BME : *син.* DME : *син.* BMD, или $P : Q : R =$ *син.* BME : *син.* DME : *син.* BMD; отсюда явствуетъ, что изобразивъ силу P чрезъ *син.* BME, получимъ силу Q въ *син.* DME,

а силу R въ *син.* BMD; то есть, *каждую изъ двухъ простыхъ силъ и составную можно изобразить всегда синусомъ угла, заключающагося между направленіями двухъ прочихъ.*

И такъ можно представлять силы двоякимъ образомъ: или линеями, взятыми на ихъ направленіяхъ, или синусами угловъ, заключающихся между ихъ направленіями; только должно помнить, что для каждой берется синусъ угла, заключающагося между направленіями двухъ другихъ силъ.

Этотъ послѣдній способъ изображать силы имѣетъ особенную пользу, которую мы увидимъ со временемъ.

202. Естьли изъ точки M, какъ изъ центра (*фиг.* 37 и 38) произвольнымъ радіусомъ ME' опишешь круговую дугу $HE'G$, пересѣкающую въ G и H продолженныя направленія силъ P и Q; потомъ изъ точки E' проведешь $E'F$, $E'I$ перпендикуляры на MD, MB, и изъ точки H перпендикуляръ HL на MD; то не трудно примѣтить, что $E'F$, $E'I$, HL сдѣлаются синусами угловъ DME, BME и BMD, и слѣд. можно вывести такую пропорцію $P : Q : R = E'I : E'F : HL$.

203. Вообразимъ теперь, что направленія двухъ силъ P и Q (*фиг.* 39 и 40), проходящихъ чрезъ двѣ постоянныя точки K и N, начнутъ отъ нихъ удаляться точкою M взаимнаго своего стеченія: въ такомъ случаѣ синусы угловъ BME, DME и BMD станутъ также уменьшаться (*); и слѣд. эти синусы тѣмъ болѣе приближатся къ дугамъ $E'H$, $E'G$, GH и съ ними будутъ сходствовать, чѣмъ болѣе точка M удалится отъ постоянныхъ K и N. Естьли точка M удалится въ безконечность, то $E'F$, $E'I$ и HL сольются съ дугою GH, которая приметъ видъ прямой линеи, перпендикулярной къ двумъ линеямъ MK и MN; этѣ послѣднія двѣ сдѣлаются почти параллельными между собою и съ линеею ME; а поелику пропорція $P : Q : R = E'I : E'F : HL$ должна состояться во всякомъ случаѣ, то HL будетъ въ семъ послѣднемъ $= E'I + E'F$ (*фиг.* 39), или $= E'I - E'F$ (*фиг.* 40). Отсюда должно заключить, что *естьли двѣ силы P и Q (фиг. 41 и 42) получатъ параллельныя направленія, то 1°. составная изъ нихъ сила будетъ также имъ*

(*) Должно припомнить (*Геом.* 279), что синусъ тупаго угла бываетъ всегда одинаковъ съ синусомъ дополненія его ко 180°.

параллельна; 2^e. *Естьли проведешь линею* FI *перпендикулярно къ этимъ направленіямъ, то каждая изъ силъ изобразится частію того перпендикуляра, которой будетъ заключаться между направленіями двухъ прочихъ силъ*; 3^e. *Составная будетъ равна суммѣ обѣихъ простыхъ, естьли этѣ послѣднія дѣйствуютъ въ одну сторону, или разности ихъ, естьли онѣ дѣйствуютъ въ противныя.*

204. Поелику вывели мы (*фиг*. 41 и 42) $P : Q : R = EI : FE : FI$, то можно также заключить по этимъ содержаніямъ, что $P : Q = EI : FE$, и $P : R = EI : FI$; то есть, что *двѣ какія нибудь силы изъ трехъ параллельныхъ, именно, изъ составной и двухъ употребляемыхъ къ составленію, находятся всегда во взаимномъ содержаніи съ двумя перпендикулярами, проведенными на ихъ направленія изъ общей точки, взятой на направленіи третьей силы.*

205. Естьли проведемъ произвольно линею ABC, то произойдетъ (*Геом*. 102) $BC : AB : AC : = EI : FE : FI$. Слѣд. должно заключить также, что $P : Q : R = BC : AB : AC$; то есть, вообще *естьли направленія двухъ параллельныхъ силъ и со-*

ставной изъ нихъ пересѣкутся какою нибудь прямою линеею, то каждая изъ трехъ силъ можетъ изобразиться частію этой прямой линеи, заключающеюся между направленіями двухъ другихъ силъ.

206. Отсюда не трудно вывести способъ находить составную силу изъ многихъ другихъ; и напротивъ сыскивать для одной какой нибудь силы столько другихъ, сколько надобно.

На примѣръ естьли бы потребовалось привести въ одну силу двѣ P и Q (*фиг.* 41), дѣйствующія въ одну сторону? Для этого провожу произвольную линею ABC; а поелику составная сила должна равняться $P + Q$ (203), то стоитъ только найти точку B, чрезъ которую она должна проходить. Но (205) $P : R = BC : AC$, то есть, $P : P + Q = BC : AC$; слѣд. должно найти между A и C такую точку B, чтобъ $BC = \frac{P \times AC}{P + Q}$.

Естьли двѣ силы будутъ дѣйствовать въ противныя стороны (*фиг.* 42), то составная изъ нихъ должна равняться въ такомъ случаѣ $P - Q$ или $Q - P$. Положимъ, что P больше Q. Проведи линею AC произвольной величины, и продолжи ее до A на количество равное AB, такъ чтобъ $P : R = BC : AC$ (205), или $P : P - Q = BC : AC$: то есть сдѣлай $BC = \frac{P \times AC}{P - Q}$.

Естьли сила Q будетъ больше P, то точка B должна находиться на продолженіи AC по другую сторону C относительно къ A.

207. Естьли вмѣсто двухъ силъ будутъ даны три P, Q, K (*фиг.* 43), то сыскавши напередъ составную силу R изъ двухъ P и Q, опредѣли потомъ составную S, равную двумъ силамъ R и K, поступая въ точности по предыдущему рѣшенію.

208. И напротивъ желая раздѣлить какую нибудь силу R на двѣ другія, которыя бы ей были параллельны (*фиг.* 41 и 42), поступай такъ.

Проведи произвольно линею PF параллельную съ направленіемъ силы R, и взявши ее за направленіе одной изъ простыхъ силъ, положи за величину ея какое нибудь количество P меньше R, естьли будетъ надобно, чтобъ простыя дѣйствовали съ разныхъ сторонъ силы R; въ такомъ случаѣ другая простая, которую назовемъ Q, должна равняться $R - P$; а чтобъ опредѣлить положеніе ея, то должно провести произвольную линею CBA и взять на продолженіи AB часть BC такую, чтобъ $Q : P = AB : CB$; естьли чрезъ точку C проведешь QC параллельную съ RB, то эта линея покажетъ направленіе силы Q.

Но естьли потребуется найти двѣ простыя силы, которыя бы находились съ одной стороны составной и дѣйствовали въ противныя стороны; то можно въ такомъ случаѣ взять за P всякое количество больше или меньше R, потомъ проведши линею PF (*фиг.* 42) параллельно съ RB для направленія силы P, должно взять на произвольной линеѣ BAC такую точку C, чтобъ $P - R$ или $R - P : R = AB : AC$. Точка C будетъ такая, чрезъ которую сила Q параллельная съ данною R должна проходить; эта точка будетъ лежать по другую сторону A относительно къ B, естьли P сдѣлаешь больше R, и

напротивъ она будетъ заключаться между A и B, естьли P возмешь меньше R.

209 То, что говоримъ мы здѣсь о силѣ R относительно къ составляющимъ ее P и Q, приличествуетъ равно и каждой изъ послѣднихъ; потому что можно вставливать, какъ мы то видѣли прежде, вмѣсто всякой одной силы произвольное число другихъ въ параллельномъ съ нею направленіи.

О Моментахъ и ихъ употребленіи при составленіи и раздѣленіи силъ.

210. То, что изъяснили мы въ предыдущей статьѣ, довольно достаточно для составленія и раздѣленія силъ, какія бы онѣ направленія и величины ни имѣли, по крайней мѣрѣ довольно достаточно до тѣхъ поръ, пока онѣ будутъ дѣйствовать въ одной плоскости. Но какъ разные роды движеній, которые подлежатъ нашему разсмотрѣнію, требуютъ способовъ опредѣлять составную силу и ея направленіе, кои были бы проще и удобнѣе другихъ, то мы теперь намѣрены заняться этимъ предметомъ.

211. *Естьли изъ какой нибудь точки* F (фиг 44 и 45), *взятой на плоскости параллелограмма* $ABCD$, *проведешь перпендикуляры* FE, FH, FG *на смѣжные бока* AB, AD *и на діагональ* AC; *то сумма произведеній каждаго перпенди-*

куляра на бокъ, къ которому онъ проведенъ, будетъ равна произведенію діагонали на сходственной ей перпендикуляръ, когда точка F (фиг. 44) *не будетъ находиться ни въ углѣ BAD, ни въ противоположномъ ему при верху. Напротивъ же* (фиг. 45) *естьли точка F будетъ лежать въ углѣ BAD или въ вертикальномъ его, то разность въ такомъ случаѣ произведеній каждого перпендикуляра на сходственной бокъ будетъ равняться произведенію діагонали на перпендикуляръ, упадающій на сію діагональ.*

Продолживъ бокъ *BC*, пока онъ пересѣчетъ въ *I* перпендикуляръ *FH*, проведи потомъ линеи *FA*, *FB*, *FC*, *FD*. Треугольникъ *FAC* (*фиг.* 44) выходитъ $= FAB + AEC + FBC = FAB + ADC + FBC$. При томъ же 1^е^. $FAC = \frac{AC \times FG}{2}$. 2^е^ Треугольникъ $FAB = \frac{AB \times FE}{2}$. 3^е^. Треугольникъ *ADC*, принявъ въ немъ *AD* за основаніе, а *IH* за высоту будетъ $= \frac{AD \times IH}{2}$. 4^е^. Треугольникъ $FBC = \frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; слѣд. $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2} + \frac{AD \times FI}{2}$; но $IH + FI =$

FH; слѣд. по удвоеніи всего получимъ $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$.

Вь *фигурѣ* 45 треугольникъ $FAC = ABC - FAB - FBC = ADC - FAB - FBC$; то есть, $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2} - \frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$, или (обративъ вниманіе на то, что $BC = AD$ и что $IH - FI = FH$, получимъ по удвоеніи всего $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$.

212. Поелику доказали мы выше, что можно всегда какія нибудь силы и составную изъ нихъ изобразить боками и діагональю параллелограмма, сдѣланнаго по ихъ направленіямъ; и потому представивъ двѣ силы P и Q (*фиг.* 44 и 45) линеями AB, AD, а составную изъ нихъ R чрезъ AC, и взявъ внѣ угла BAD и противоположнаго ему при верху какую нибудь точку F въ одной плоскости съ тремя этими силами, получимъ $R \times FG = Q \times FH + P \times FE$; естьлижъ точка F взята будетъ въ самомъ углѣ BAD или въ вертикальномъ его, то выдетъ $R \times FG = Q \times FH - P \times FE$.

213. Произведеніе силы на разстояніе направленія ея отъ какой нибудь постоян-

ной точки называется *моментомъ* этой силы. Такимъ образомъ $Q \times FH$ будетъ моментъ силы Q; $R \times FG$ будетъ моментъ силы R.

214. Поелику силы измѣряются (158) количествомъ движенія, то есть, произведеніемъ опредѣленной массы на скорость, какую онѣ способны сообщить той массѣ; и потому моментъ какой нибудь силы будетъ имѣть величиною произведеніе массы на скорость и еще на разстояніе направленія ея отъ постоянной точки.

215. Естьли вообразимъ себѣ перпендикуляры FH, FG, FE линеями, которыя никакой гибкости и никакой массы не имѣютъ, и которыя утверждены въ точкѣ F такъ, что могутъ обращаться около ее, а силы P, Q и составную изъ нихъ R представимъ заключенными въ концахъ E, H, G; то явствуетъ, что (*фиг.* 44) всѣ сіи три силы будутъ стремиться вертѣть систему въ одну сторону около точки F; а (*фиг.* 45) двѣ силы Q и R будутъ стремиться вертѣть систему въ противную сторону относительно къ силѣ P.

И такъ можно заключить, *что моментъ составной силы, взятой относи-*

тельно къ какой нибудь постоянной точкѣ F, бываетъ всегда равенъ суммѣ или разности двухъ составляющихъ, глядя потому, стремятся ли онѣ вертѣть систему около той точки въ одну сторону, или въ противныя.

216. А отсюда можно заключить вообще, что *какое бы число силъ P, Q, S, T и проч.* (*фиг.* 46) *ни было, и какія бы величины и направленія онѣ ни имѣли, лишь бы только находились всѣ въ одной плоскости; моментъ составной изъ всѣхъ этихъ силъ, взятой относительно ко всякой точкѣ F, лежащей въ оной же плоскости, будетъ всегда равенъ суммѣ моментовъ силъ, которыя стремятся вертѣть около той точки въ одну сторону, безъ суммы моментовъ тѣхъ, которыя стремятся вертѣть въ противную.*

Ибо естьли представимъ чрезъ r составную силу изъ двухъ P и Q, имѣющихъ направленіе по AP и EQ; чрезъ r' составную изъ r и S, которая дѣйствуетъ по GS; наконецъ чрезъ R составную изъ r' и T, дѣйствующую по DT, и когда сверхъ того предположимъ m моментомъ r, а m' моментомъ r'; то по проведеніи перпендикуляровъ FA, FE, FG, FD, FB на составляющія силы P, Q, S, T и на

составную изъ нихъ R, получимъ 1^e. $m = P \times AF + Q \times EF$. 2^e. $m' = m - S \times FG$. . . 3^e. $R \times FB = m' - T \times FD$; наконецъ сложивъ всѣ эти три уравненія и уничтоживъ подобныя количества, которыя найдутся въ обѣихъ частяхъ новаго, будемъ имѣть $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$; а изъ сего явствуетъ, что моменты двухъ силъ T и S, которыя вертятъ въ лѣвую сторону, стоятъ въ самомъ дѣлѣ съ противнымъ знакомъ въ разсужденіи моментовъ силъ P и Q, стремящихся вертѣть въ правую сторону.

217. Естьли точка F будетъ находиться на самомъ направленіи составной силы, то моментъ ея будетъ въ такомъ случаѣ равняться нулю; а поелику онъ долженъ равняться суммѣ моментовъ силъ, стремящихся вертѣть въ одну сторону безъ суммы тѣхъ, которыя стремятся вертѣть въ противную сторону, то должно заключить, что разность двухъ суммъ моментовъ, взятыхъ относительно къ какой нибудь точкѣ составной силы, равна также нулю.

И напротивъ *естьли сумма моментовъ многихъ силъ, стремящихся вертѣть около какой нибудь точки въ одну*

сторону безъ суммы моментовъ прочихъ, которые стремятся вертѣть въ противную сторону около той же точки, равна нулю; то должно заключить, что составная сила проходитъ чрезъ самую точку.

218. Поелику всѣ сіи предложенія бываютъ несумнѣнны всегда, какіе бы углы ни были между направленіями силъ; то они останутся вѣрными и тогда, когда силы будутъ заключать въ направленіяхъ своихъ безконечно малые углы, или когда (что все равно) направленія силъ будутъ параллельны между собою.

219. Отсюда не трудно вывести способъ опредѣлять положеніе и величину составной силы изъ произвольнаго числа другихъ, когда послѣднія будутъ всѣ дѣйствовать въ одной плоскости.

Положимъ, что три силы P, Q и S (*фиг.* 47) даны, двѣ первыя дѣйствуютъ по AP, BQ, а послѣдняя по CS. Проведи произвольно какую нибудь линею $FABC$ перпендикулярно къ направленіямъ AP, BQ и проч. и вообрази, что D есть точка, чрезъ которую составная сила R должна пройти. Тогда взявши произвольно точку F на линеѣ $FABC$, получишь въ силу предыдущихъ пра-

вилъ $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$; но какъ разстоянія AF, FB, FC и силы P, Q, S извѣстны, то не трудно вывести изъ этого уравненія величину разстоянія DF, при которомъ приходитъ составная сила R, когда величина ея будетъ извѣстна. Посмотримъ же какой величины должна быть эта составная сила.

Возьмемъ на продолженіи AF другую точку F', и слѣд. въ силу того же правила будемъ имѣть $P \times AF' + Q \times BF' - S \times CF' = R \times DF'$. Естьли вычтемъ изъ настоящаго уравненія первое, замѣтивъ притомъ, что $AF' - AF = FF'$, $BF' - BF = FF'$, $CF' - CF = FF'$, $DF' - DF = FF'$, то произойдетъ $P \times FF' + Q \times FF' - S \times FF' = R \times FF'$, или по раздѣленіи всего на FF', $P + Q - S = R$.

Естьли обратимъ вниманіе на предыдущее разсужденіе, то увидимъ, что истинна его ни мало не зависитъ отъ числа силъ; и слѣд, должно заключить вообще, *что составная сила изъ произвольнаго числа параллельныхъ бываетъ всегда равна суммѣ дѣйствующихъ въ одну сторону безъ суммы дѣйствующихъ въ противную.*

Естьли въ уравненіи $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$, найденномъ выше, вставимъ

мѣсто R величину его $P+Q-S$, то получимъ $P\times AF+Q\times BF-S\times CF=(P+Q-S)\times DF$; отсюда выходитъ $DF=\frac{P\times AF+Q\times BF-S\times CF}{P+Q-S}$; слѣд. вообще. . . .

Для опредѣленія, на какомъ разстояніи отъ данной точки проходитъ составная сила изъ многихъ параллельныхъ; должно изъ суммы моментовъ силъ, стремящихся вертѣть въ одну сторону, вычесть сумму моментовъ тѣхъ, которые стремятся вертѣть въ противную, и раздѣлить остатокъ на сумму силъ дѣйствующихъ въ одну сторону безъ суммы силъ, дѣйствующихъ въ противную (*).

220. Естьли бы точка F, которую принимали мы сперва произвольно, случалась въ

(*) Не должно принимать за одно силы, дѣйствующія въ противныя стороны съ силами, которыя стремятся вертѣть въ противныя же стороны. Двѣ силы, дѣйствующія въ противныя стороны, стремятся часто вертѣть въ одну сторону; это зависитъ по большой части отъ точки, къ которой относимъ обращеніе, или моменты. На примѣръ двѣ силы Q и S (*фиг.* 47) дѣйствуютъ въ противныя стороны, однако жѣ онѣ стремятся вертѣть линею BC въ одну сторону около точки, взятой между B и C; естьли примемъ обращеніе относительно къ точкѣ F, то сила Q будетъ стремиться вертѣть CF въ противную сторону въ разсужденіи силы S.

самой точкѣ D, чрезъ которую проходитъ составная сила; то разстояніе DF равняясь въ такомъ случаѣ нулю, должно бы получить и выраженіе величины своей . . . . . . $\frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$, превращающееся въ $\frac{- P \times AD + Q \times BD - S \times CD}{P + Q - S}$ (потому что сила P стремится вертѣть около точки D въ противную сторону въ разсужденіи силы Q) равнымъ нулю; слѣд. будемъ имѣть $- P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$. А какъ точка F, взятая произвольно, можетъ лежать выше и ниже настоящаго своего положенія, и притомъ точка D можетъ находиться не въ одномъ мѣстѣ направленія составной силы R, но и во всякомъ другомъ; то заключимъ вообще, что. . . .

Моменты многихъ параллельныхъ силъ, взятые относительно ко всякой точкѣ направленія составной силы, бываютъ такого свойства, что сумма моментовъ силъ, стремящихся вертѣть въ одну сторону, равняется суммѣ моментовъ тѣхъ, которые стремятся вертѣть въ противную.

221. И такЪ принявЪ сЪ противными знаками какЪ моменты силЪ, стремящихся вертѣть вЪ противныя стороны, такЪ и самыя силы, которыя дѣйствуютЪ вЪ противныя же стороны, можно вообще заключить, что. . . . .

1е. *Составная сила изЪ многихЪ параллельныхЪ равняется всегда суммѣ всѣхЪ послѣднихЪ.* 2е. *Этаже составная, имЪ параллельная, проходитЪ по такому слѣду точекЪ, которыя имѣютЪ свойствомЪ, что сумма моментовЪ относительно кЪ каждой изЪ нихЪ равняется нулю.*

ИзЪясненныя теперь правила весьма употребительны, и мы увидимЪ немедленно сЪ какою легкостію можно вывести помощію ихЪ положеніе центра тяжести тѣлЪ. ПриступимЪ кЪ силамЪ, коихЪ направленія составляютЪ углы между собою.

222. Пусть P, Q, S и проч. (*фиг.* 48) будутЪ многія силы, имѣющія направленіе вЪ одной плоскости. ПоложимЪ притомЪ, что силу P, дѣйствующую по AP, представляетЪ AB; силу Q, дѣйствующую по EQ, представляетЪ EG; силу S, дѣйству-

ющую по IS, представляетъ IL. Изъ точки T, произвольно взятой въ плоскости этихъ силъ, вообразимъ двѣ прямыя неопредѣленныя линеи TE', TE'', составляющія между собою какой нибудь уголъ, (и для большой ясности и простоты прямой); вообразимъ также каждую изъ силъ P, Q, S или AB, EG, IL раздѣленною на двѣ другія, изъ которыхъ одна параллельна съ линеею TE', а другая параллельна съ линеею TE''; и слѣд. каждая изъ нихъ должна изобразиться сходственнымъ бокомъ параллелограмма, котораго діагональ представляетъ начальную силу. Явствуетъ изъ предыдущаго (219), что силы AD, EF, IM (*) будучи всѣ параллельны между собою, будутъ имѣть составною силою единственную VO, которая имъ параллельна, имѣетъ величиною $AD + EF - IM$, и проходитъ на разстояніи

(*) Не потеряемъ изъ виду сказаннаго (192). Чрезъ выраженіе *силъ* AB, EG и проч. мы разумѣемъ, что линеи AB, EG и проч. содержатся между собою, какъ количества движенія, какое силы P, Q и проч. могутъ произвести въ массахъ, будучи имъ переданы. Тожъ должно разумѣть о силахъ AD, EF и проч. Мы понимаемъ также, что количества движенія этихъ силъ къ количествамъ движенія, представленнымъ чрезъ AB, EG, содержатся, какъ AD и EF къ AB и EG.

VV' такомъ, что $VV' =$ . . . .
$$\frac{AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'}{AD + EF - IM}.$$

Равномѣрно силы AC, EH, IK параллельныя съ TE'' могутъ приведены быть въ одну VN, которая имъ параллельна, равна $AC + EH + IK$, и (по предположеніи, что V изображаетъ точку, гдѣ направленіе этой силы встрѣчается съ направленіемъ силы OV) проходитъ на разстояніи VV'' такомъ, что $VV'' = \frac{AC \times AA'' + EH \times EE'' + IK \times II''}{AC + EH + IK}$.

По предположеніи сего, естьли силы P, Q, S и ихъ направленія (то есть, углы, которые онѣ составляютъ съ постоянными и извѣстными линеями, такими на примѣръ какъ TE' и TE'', или съ ихъ параллельными) будутъ даны, то можно узнать въ каждомъ треугольникѣ BAD, GEF, IKL гипотенузу и углы; послѣ чего не трудно опредѣлить линеи AD, EF KL или IM, и линеи BD или AC, IG или EH, и IK; а по этимъ послѣднимъ будутъ извѣстны величины обѣихъ составныхъ силъ $AD + EF - IM$ и $AC + EH + IK$. А какъ сверхъ того не можно не знать разстояній AA', AA''; EE', EE'' и проч. и притомъ положеніе точекъ A, E, въ которыхъ пред-

полагаемъ, что силы передаются, должно быть извѣстно; то можно найти всѣ количества, которыя входятъ въ выраженіи разстояній VV' и VV''. Слѣд. легко можно опредѣлить точку V, гдѣ пересѣкаются обѣ составныя силы. Наконецъ взявши $VO = AD + EF - IM$ и $VN = AC + EH + IK$, и начертивъ параллелограммъ $OVNX$, получимъ въ діагоналѣ VX составную силу R изъ двухъ составныхъ же, параллельныхъ съ TE' и TE'', то есть, составную изъ всѣхъ данныхъ силъ.

О Силахъ, которыя дѣйствуютъ въ разныхъ плоскостяхъ.

223. Положимъ, что три силы P, Q, S (*фиг.* 49) имѣютъ направленія по линеямъ AP, BQ, CS параллельнымъ между собою, но лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ.

Вообразимъ плоскость XZ, къ которой три прямыя AP, BQ, CS перпендикулярны, и другую плоскость ZV, съ которой онѣ параллельны; и притомъ положимъ, что A, B, C суть точки, въ которыхъ этѣ линеи пересѣкаютъ плоскость XZ.

Двѣ силы P и S находятся въ одной плоскости, которой сѣченіе съ плоскостію

XZ представляетъ прямая линея AC. Слѣд. обѣ сіи силы могутъ приведены быть въ одну $R' = P + S$, которая будетъ имъ параллельна и пройдетъ чрезъ точку D такую, что въ сходственность (220) получимъ $P \times AD = S \times CD$.

Обѣ силы R' и Q находятся въ одной плоскости, которой сѣченіе съ плоскостію XZ есть BD; слѣд. онѣ могутъ приведены быть въ одну R, которая равна $R' + Q$, то есть, $= P + S + Q$, имъ параллельна и проходитъ чрезъ точку E такую, что получаемъ $R \times DE = Q \times BE$. Отсюда и изъ предыдущаго заключаемъ вообще, что *всѣ силы, сколько бы ихъ числомъ ни было, имѣющія параллельныя направленія, превращаются всегда въ одну, равную суммѣ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, безъ суммы дѣйствующихъ въ противную, не смотря на то, будутъ ли онѣ расположены въ одной плоскости или въ разныхъ.*

Посмотримъ теперь съ особливымъ вниманіемъ, какъ опредѣляется слѣдъ, по которому должна пройти составная сила.

Естьли изъ точекъ A, D, C, B, E проведемъ линеи AA', DD', CC', BB', EE' перпендикулярно на общее сѣченіе двухъ пло-

скостей XZ и ZV, то по причинѣ параллельныхъ AA', DD', CC', получимъ $AD : CD = A'D' : C'D'$; но изъ найденнаго выше уравненія $P \times AD = S \times CD$ выходитъ также $AD : CD = S : P$; слѣд. $A'D' : C'D' = S : P$, и слѣд. $P \times A'D' = S \times C'D'$.

Равномѣрно по причинѣ параллельныхъ линей DD', EE', BB' получаемъ $DE : BE = D'E' : B'E'$; но изъ найденнаго уравненія $R' \times DE = Q \times BE$ можно вывести также $DE : BE = Q : R'$; слѣд. $D'E' : B'E' = Q : R' = Q : P + S$, и слѣд. $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$

Возьмемъ теперь на сѣченіи ZT двухъ плоскостей постоянную точку T и станемъ искать разстояніе TE' отъ этой точки къ точкѣ E', сходственной съ E, чрезъ которую проходитъ составная сила. Явствуетъ, что $A'D' = TD' - TA'$, $C'D' = TC' - TD'$, $D'E', = TE' - TD'$, $B'E' = TB' - TE'$. Вставивъ сіи величины въ двухъ уравненіяхъ $P \times A'D' = S \times C'D'$ и $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$, получимъ $P \times TD' - P \times TA' = S \times TC' - S \times TD'$, и $(P + S) \times TE' - (P + S) \times TD' = Q \times TB' - Q \times TE'$. Но по первому изъ сихъ уравненій можно вывести $(P + S)\ TD' = P \times TA' + S \times TC'$; вставивъ эту величину

ю второмъ, будемъ имѣть $(P + S) \times TE' - P \times TA' - S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; наконецъ совокупивъ всѣ члены умноженные на TE', получимъ $(P + Q + S) \times TE' = P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$. Отсюда выходитъ $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P + Q + S}$.

Но это выраженіе разстоянія TE' есть тожъ самое, какому бы надобно выпти для разстоянія, на которомъ должна пройти составная сила, естьли бы три силы P, Q, S находились всѣ въ одной плоскости ZV, и проходили бы чрезъ точки A', C', B', сходственныя съ точками A, C, B, чрезъ которыя онѣ теперь проходятъ. Слѣд. естьли вообразимъ прямую линею TX перпендикулярную къ плоскости ZV, то получимъ разстояніе TE' составной силы R, взявши сумму моментовъ (*), относительно къ этой прямой линеи, какъ бы всѣ силы не перемѣняя разстоянія своего отъ нея, находились въ

(*) Должно примѣтить здѣсь и въ послѣдующемъ, что подъ общимъ словомъ: *сумма моментовъ*, должно разумѣть сумму моментовъ силъ стремящихся вертѣть въ одну сторону безъ суммы моментовъ силъ, стремящихся вертѣть въ противную прежнимъ. Равномѣрно подъ словомъ: *сумма силъ*, должно разумѣть сумму тѣхъ, которыя дѣйствуютъ въ одну сторону безъ суммы силъ, дѣйствующихъ въ противную,

плоскости ZV, къ которой она перпендикулярна, и раздѣливши эту сумму моментовъ на сумму силъ.

Теперь для опредѣленія точки E остается узнать разстояніе EE', или (по проведеніи EE'' параллельной съ ZT) разстояніе TE'', на которомъ та же самая сила проходитъ. Но явствуетъ изъ сказаннаго о разстояніи TE', что для опредѣленія разстоянія TE'', надобно такимъ же образомъ вообразить плоскость, проходящую чрезъ XT и параллельную съ направленіями силъ; взять сумму моментовъ относительно къ TZ пересѣченію той плоскости съ плоскостью ZV, какъ бы всѣ силы не перемѣняя разстоянія своего отъ плоскости ZV, находились всѣ въ плоскости XV, и раздѣлить эту сумму моментовъ на сумму силъ. Послѣ чего получимъ все, что нужно для опредѣленія точки E; чрезъ которую проходитъ составная сила.

224. Посмотримъ теперь на силы, коихъ направленія находятся въ разныхъ плоскостяхъ и не параллельны между собою.

Положимъ, (*фиг.* 50), что P, Q, R суть три силы, которыхъ направленія идутъ по линеямъ AP, BQ, CR, лежащимъ въ раз-

ныхъ плоскостяхъ. Вообразимъ какую нибудь плоскость XZ, которая въ H пересѣкаетъ направленіе AP, въ F направленіе BQ и въ L направленіе CR. Поелику можно (196) переносить силу во всякую точку ея направленія, то вообразимъ всѣ три силы перенесенными въ точки H, F, L, и представимъ ихъ линеями HV, FT, LK, продолженіями линей AP, BK, CR ниже плоскости XZ. Вообразимъ еще, что по прямымъ линеямъ AH, BF, CL проведены перпендикулярныя плоскости къ плоскости XZ, коихъ пересѣченія съ этою послѣднею будутъ прямыя линеи GHN, EFY, DLM. По предположеніи сего могу раздѣлить каждую изъ этихъ силъ на двѣ другія, изъ которыхъ одна будетъ находиться въ плоскости XZ, а другая будетъ перпендикулярна къ этой плоскости; на примѣръ могу раздѣлить силу HV на силу, имѣющую направленіе по HN и на другую такую, которая идетъ по HO перпендикулярно къ плоскости XZ. Такимъ образомъ вмѣсто трехъ силъ HV, FT, LK могу поставить слѣдующія шесть силъ HN, FY, LM, HO, FS, LI, изъ которыхъ первыя три находятся въ плоскости XZ, а послѣднія три перпендикулярны къ этой плоскости.

А какъ можно по изъясненному (222) привести три силы HN, FT, LM въ одну, которая будетъ также въ плоскости XZ, и (223) можно привести три силы HO, FS, LI въ одну перпендикулярную къ той же плоскости XZ; то *можно вообще, сколько бы силъ числомъ ни было и какіябъ онѣ направленія ни имѣли, привести ихъ въ двѣ, изъ которыхъ одна будетъ имѣть направленіе въ извѣстной плоскости, а другая въ перпендикулярной къ ней.*

225. Хотя доказательство этого предложенія можетъ по видимому относиться къ одному случаю и имѣетъ мѣсто тогда только, когда всѣ силы пересѣкаютъ избранную плоскость XZ; однако оно справедливо вообще. Ибо допустивъ, что избранная плоскость пересѣкается нѣкоторыми только силами, а съ другими она остается параллельна; можно по приведеніи всѣхъ силъ, пересѣкающихъ ее, въ двѣ, перемѣнить потомъ положеніе сей плоскости такъ, чтобы она не переставая встрѣчаться съ составными двумя силами, начала притомъ пересѣкать направленія и тѣхъ, которыя прежде были съ нею параллельны.

226. И такъ свойства силъ, имѣющихъ направленія въ разныхъ плоскостяхъ, не оди-

таковы сЪ свойствами тѢхЪ; которыя имѢютЪ направленія вЪ одной плоскости. ПослѢднія могутЪ быть всегда приведены вЪ одну, а первая вЪ двѢ; и тогда только можно изобразить ихЪ одною, когда составная изЪ силЪ, дѢйствующихЪ вЪ плоскости XZ, пересѢчетЪ составную изЪ силЪ перпендикулярныхЪ кЪ той же плоскости.

227. И такЪ посредствомЪ изЪясненнаго можно найти всегда двѢ составныя силы изЪ произвольнаго числа другихЪ, имѢющихЪ направленія вЪ разныхЪ плоскостяхЪ. Но какЪ способЪ сей, полезный во многихЪ случаяхЪ, не такЪ легокЪ при рѢшеніи нѢкоторыхЪ вопросовЪ, то мы намѢрены теперь показать другой.

ПоложимЪ, что P (*фиг.* 51) есть одна изЪ данныхЪ силЪ, которую представляетЪ линея AB. ПоложимЪ также, что X есть постоянная точка, а XZ, XY, XT три прямыя линеи, перпендикулярныя между собою. Естьли на AB, какЪ на діагонали, начертишь прямоугольной четвероугольникЪ $ADEC$, котораго плоскость будетЪ перпендикулярна кЪ плоскости YXT, а бокЪ BC параллеленЪ сЪ XZ; потомЪ на BD, какЪ на діагонали, начертишь прямоугольникЪ

DFBE, котораго плоскость будетъ параллельна съ плоскостью *YXT*, а бока *BF*, *BE* съ прямыми линеями *XT*, *XY*; то явствуетъ 1е. что вмѣсто силы *AB* можно принять двѣ другія *BC* и *BD*, силу *BC* параллельную съ *XZ*, или перпендикулярную къ плоскости *YXT*, и силу *BD* параллельную съ тоюжъ плоскостью. 2е. Что вмѣсто сей силы *BD* можно принять силу *BE* параллельную съ *XY*, или перпендикулярную къ плоскости *ZXT* вмѣстѣ съ силою *BF* параллельною съ *XT* или перпендикулярною къ плоскости *ZXY*; такимъ образомъ сила *P* или *AB* можетъ раздѣлиться на три силы, параллельныя съ тремя линеями перпендикулярными между собою, или, все равно, можетъ раздѣлиться на три силы перпендикулярныя къ тремъ плоскостямъ, перпендикулярнымъ между собою.

А какъ это разсужденіе наше о силѣ *P* можно примѣнить и ко всякой другой, которая не будетъ перпендикулярна ни съ какою изъ означенныхъ плоскостей; то не трудно теперь вывести способъ, какъ приводить многія силы, лежащія въ разныхъ плоскостяхъ, въ три такія, которыя были бы перпендикулярны къ тремъ плоскостямъ также перпендикулярнымъ между собою; и именно въ

образивЪ всѣ данныя силы раздѣленными наподобіе силы P показаннымЪ теперь образомЪ, приведи (223) всѣ силы перпендикулярныя кЪ плоскости ZXT вЪ одну, тожЪ сдѣлай сЪ силами перпендикулярными кЪ плоскости ZXY и сЪ силами перпендикулярными кЪ плоскости YXT.

О Центрахъ Тяжести.

228. Прежде нежели покажемЪ особенныя дѣйствія силЪ вЪ машинахЪ или вообще вЪ тѣлахЪ извѣстной матеріи и строенія, остановимся на центрахЪ тяжести; ибо познаніе сихЪ центровЪ весьма много способствуетЪ кЪ опредѣленію движеній, какимЪ причастны могутЪ быть машины или тѣла.

Припомнимъ сказанное нами (171), что направленія, по которымЪ тяжесть дѣйствуетЪ на матеріальныя частицы тѣла, бываютЪ параллельны между собою; и что эта сила стремится сообщить каждой части вещества одинакую скорость вЪ одинакое время.

229. *ЦентромЪ тяжести* тѣла или *Системы* тѣлЪ (то есть, какого нибудь совокупленія тѣлЪ) называется та точка, чрезЪ которую проходитЪ во всякомЪ положеніи онаго тѣла или системы составная сила изЪ всѣхЪ частныхЪ, происходящихЪ отЪ натуральнаго дѣйствія бремененія каждой части тѣла или системы.

На примѣръ естьли въ настоящемъ положеніи треугольника ABC (фиг. 52) составное дѣйствіе тяжести на всѣ части этого треугольника должно пройти по извѣстной точкѣ G поверхности его, и въ другомъ положеніи abc оно пройдетъ также чрезъ ту же точку G, то эта точка G называется центромъ тяжести. Мы скоро увидимъ, что составная сила проходитъ всегда по одной и той же точкѣ во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ тѣла.

230. Способъ опредѣлять центръ тяжести можно легко вывести изъ показаннаго употребленія моментовъ для нахожденія составной силы изъ многихъ параллельныхъ между собою.

Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что M, N, P (фиг. 53) представляютъ произвольное число тѣлъ, которыхъ массы примемъ сосредоточенными въ точкахъ B, A, C, лежащихъ въ одной плоскости. Представимъ чрезъ p скорость, которую тяжесть стремится передать каждому тѣлу въ одну минуту, и которая (171) есть одинакова для каждаго. Послѣ чего $p \times M$ или pM, pN, pP будутъ выражать количества движенія, или тѣ силы, посредствомъ которыхъ тѣла стремятся двигаться по направленіямъ параллельнымъ $C''C$, $B''B$, $A''A$. Но по объявленному (219) должно, для опредѣленія положенія составной силы, найти сумму моментовъ относительно къ какой нибудь точкѣ T, взятой на линеѣ перпендикулярной къ этимъ

направленіямъ, и раздѣлить эту сумму на сумму силъ; слѣд. для величины разстоянія TG'', на которомъ проходитъ составная сила, получимъ такое выраженіе $TG'' = \ldots\ldots \frac{pM \times TB'' + pN \times TA'' + pP \times TC''}{pM + pN + pP}$, которое по уничтоженіи общаго фактора p превратится въ $TG'' = \frac{M \times TB'' + N \times TA'' + P \times TC''}{M + N + P}$. Но естьли по проведеніи линей BB', AA', CC' параллельныхъ съ TG'' и оканчивающихся у вертикальной TC', вообразимъ, что точка G, взятая на направленіи составной силы, представляетъ искомой центръ; то продолживъ GG' параллельную съ TG'', получимъ $TG''B'' = GG'$, $TB'' = BB'$, $TA'' = AA'$, $TC'' = CC'$; и слѣд. $GG' = \frac{M \times BB' + N \times AA' + P \times CC'}{M + N + P}$; то есть, ограничивъ слово моментъ, и разумѣя подъ нимъ произведеніе массы тѣла на разстояніе его отъ прямой линеи, заключимъ, что . . . .

Разстояніе общаго центра тяжести многихъ тѣлъ отъ какой нибудь прямой линеи, опредѣляется раздѣленіемъ суммы моментовъ тѣлъ, (взятыхъ относительно къ той линеѣ) на сумму массъ.

Вообразимъ теперь, что система тѣлъ M, N, P, перемѣнилась такъ, что линея TA'', которая была прежде горизонтальною, сдѣлалась послѣ вертикальна, и относительно къ линеѣ TC' приняла противное положеніе; въ такомъ случаѣ можно доказать, что для опредѣленія разстоянія составной силы относительно къ TA'', которая становится теперь вертикальною, должно сыскать сумму моментовъ въ разсужденіи TA'', и раздѣлить ее на сумму массъ. Слѣд. получимъ также, какъ прежде $GG'' = \frac{M \times BB'' + N \times AA'' + P \times CC''}{M + N + P}$.

Но опредѣливши разстоянія центра G отъ двухъ постоянныхъ и извѣстныхъ линей TA'' и TC', можно безъ всякаго труда заключить о положеніи его; потому что разстоянія BB', BB'', AA', AA'' извѣстны, ибо мы вольны вездѣ избрать точку T, по которой проходятъ TA'' и TC'.

231. Естьли каждое изъ разстояній AA'', BB'' и проч. будетъ равно нулю, то есть, естьли всѣ тѣла будутъ находиться на одной прямой линеѣ TA''; то сумма моментовъ относительно къ этой прямой линеѣ, и слѣд. разстояніе GG'' будутъ также равны нулю. Слѣд. *естьли многія тѣла, принимаемыя точками, будутъ лежать всѣ на одной*

прямой линѣ, то и общій центръ тяжести ихъ будетъ также на той линѣ.

232. Естьли линеи TA'' и TC' расположатся такъ, что одна которая нибудь изъ нихъ, или обѣ будутъ имѣть тѣла по обѣ стороны себя; то должно въ такомъ случаѣ вмѣсто суммы моментовъ принимать сумму моментовъ тѣлъ лежащихъ съ одной стороны безъ суммы моментовъ тѣлъ, лежащихъ по другую сторону. Что касается до знаменателя дроби, выражающей разстояніе центра тяжести, то онъ будетъ состоять изъ суммы массъ; потому что всѣ силы этихъ массъ, по свойству бремененія, дѣйствуютъ въ одну сторону. Это относится вообще ко всякому числу тѣлъ, принимаемыхъ точками и лежащихъ въ одной плоскости; все это слѣдуетъ изъ сказаннаго (219).

Линеи TA', TA'' называются *осями моментовъ.*

233. Естьли вообразимъ теперь, что точка T, которую принимали мы сначала произвольно, будетъ находиться въ точкѣ G, то GG' и GG'' сдѣлаются въ такомъ случаѣ равны нулю. Слѣд. сумма моментовъ относительно къ TC' и сумма моментовъ от-

носительно къ TA'' должны быть также порознь равны нулю.

234. Естьли сумма моментовъ нѣсколькихъ тѣлъ относительно къ прямой линеѣ RS, проходящей чрезъ точку G (*фиг.* 54), равняется нулю, такъ какъ и сумма моментовъ относительно къ прямой PQ, перпендикулярной къ RS и проходящей чрезъ точку G; то утверждаю, что сумма моментовъ относительно ко всякой другой прямой MN, проходящей чрезъ ту же точку G, будетъ также равна нулю.

Ибо естьли, по проведеніи перпендикуляровъ AA', AA'', AA''' на линеи PQ, RS, MN, предположимъ точку I въ такомъ мѣстѣ, гдѣ AA' пересѣкается съ MN; то въ въ прямоугольномъ треугольникѣ $GA'I$ получимъ *син.* GIA' или *кос.* $PGM : GA'$ или AA'' $=$ *син.* $PGM : A'I = \frac{AA''\ син.\ PGM}{кос.\ PGM}$; слѣд. $AI = AA' - A'I = AA' - \frac{AA''\ син.\ PGM}{кос.\ PGM}$; притомъ же въ прямоугольномъ треугольникѣ IAA''' (по допущеніи радіуса $= 1$) выходитъ $1 : AI =$ *син.* AIA''' или *кос.* $PGM : AA'''$; слѣд. $AA''' = AI \times$ *кос.* PGM, то есть, $AA''' = AA'$ *кос.* $PGM - AA''$ *син.* PGM; и

слѣд. по умноженіи на массу A, получимъ за величину момента $A \times AA''' = A \times AA' \times$ *кос.* $PGM - A \times AA''$ *син.* PGM; то есть моментъ тѣла A относительно къ оси MN равняется косинусу угла PGM, умноженному на моментъ относительно къ оси PQ, безъ синуса того же угла PGM, умноженнаго на моментъ относительно къ оси RS.

Но не трудно примѣтить, что тожъ самое должно произойти и со всякимъ другимъ тѣломъ кромѣ знаковъ, глядя потому, какъ тѣла будутъ расположены, съ одной стороны или съ разныхъ въ разсужденіи линеи MN. Слѣд. естьли пожелаемъ узнать сумму всѣхъ моментовъ относительно къ оси MN, то найдемъ, что она равна косинусу угла PGM, умноженному на сумму моментовъ относительно къ PQ, безъ синуса угла PGM, умноженнаго на сумму моментовъ относительно къ RS. Но поелику каждая изъ сихъ послѣднихъ двухъ суммъ равняется нулю по положенію, то и произведенія ихъ на косинусъ и синусъ угла PGM, превратятся въ нуль; и слѣд. *сумма моментовъ относительно къ какой нибудь оси MN, проходящей чрезъ центръ тяжести G, равняется нулю.*

235. И такъ заключимъ отсюда, что составное или сложное дѣйствіе изъ всѣхъ частныхъ дѣйствій тяжести на каждую часть системы тѣлъ, проходитъ всегда по одной точкѣ той системы во всякомъ ея положеніи; ибо сумма моментовъ многихъ параллельныхъ силъ можетъ быть равна нулю относительно только къ направленію составной.

Хотя доселѣ говорили мы о такихъ тѣлахъ, которыхъ центры тяжести находятся въ одной плоскости; однако изъясненныя истинны имѣютъ мѣсто и тамъ, гдѣ части системы будутъ находиться въ разныхъ плоскостяхъ: что мы теперь и намѣрены изслѣдовать.

236. Естьли тѣла, которыя мы все однакожъ принимаемъ точками, не будутъ находиться въ одной плоскости, то вообразивъ горизонтальную плоскость XZ (*фиг.* 49), продолжи изъ тяжелыхъ точекъ P, Q, S вертикальныя линеи PA, QB, SC; и для опредѣленія точки E, чрезъ которую проходитъ составная сила RE, на направленіи которой долженъ быть центръ тяжести, сыщи (223) моменты относительно къ двумъ прямымъ постояннымъ линеямъ TX, TZ, лежащимъ въ горизонтальной плоско-

сти ZX и перпендикулярнымъ между собою; возьми, говорю я, сумму моментовъ, какъ бы всѣ тѣла находились въ этой горизонтальной плоскости, и раздѣливъ каждую изъ нихъ на сумму массъ P, Q, S, получишь два разстоянія $E'E$, $E''E$. Послѣ чего стоитъ только найти, на какомъ разстояніи EG ниже горизонтальной плоскости XZ лежитъ центръ. Но естьли перемѣнишь положеніе фигуры, сдѣлавъ плоскость XZ вертикальною, а плоскость ZV горизонтальною; то явствуетъ, что для опредѣленія разстоянія $E'G'$ сходственнаго съ высотою $E'G$ и равнаго ей, должно взять сумму моментовъ относительно къ ZT, какъ бы всѣ тѣла были въ плоскости ZV, и раздѣлить эту сумму моментовъ на сумму массъ; тогда получишь все, что нужно для опредѣленія положенія центра тяжести.

237. И такъ возобновляя все сказанное, заключимъ, что опредѣленіе центра тяжести состоитъ въ слѣдующемъ.

1е. Естьли всѣ тѣла, принимаемыя точками, будутъ находиться на одной прямой линеѣ (*фиг.* 55); то должно взять сумму моментовъ относительно къ постоянной точкѣ F, выбранной произвольно на той прямой линеѣ, и раздѣлить ее на сумму массъ;

частное число покажетЪ разстояніе центра тяжести G отЪ той же точки F.

2^{e}. Естьли всѣ тѣла, принимаемыя точками, будутЪ лежать вЪ одной плоскости, но не на прямой линеѣ; то вообразивЪ чрезЪ точку T (*фиг.* 53), произвольно взятую вЪ той плоскости, двѣ линеи TA'', TA' перпендикулярныя между собою, проведи изЪ каждой тяжелой точки перпендикуляры кЪ обѣимЪ симЪ линеямЪ; потомЪ представивЪ тяжелыя точки попеременно приложенными кЪ линеямЪ TA'' и TA' вЪ точкахЪ, гдѣ оканчиваются перпендикуляры, сыщи, какЪ и вЪ предыдущемЪ случаѣ, центрЪ тяжести G'' на TA'' и центрЪ тяжести G' на TA'; наконецЪ продолживЪ чрезЪ этѣ двѣ точки линеи $G''G$ и $G'G$ параллельныя сЪ TA' и TA'', получишь вЪ точкѣ G пересѣченія ихЪ искомой центрЪ тяжести.

3е. НаконецЪ естьли тѣла, принимаемыя точками, будутЪ находиться вЪ разныхЪ плоскостяхЪ, то должно вообразить три плоскости, одну горизонтальную (*фиг.* 49), а двѣ вертикальныя и перпендикулярныя между собою. ПотомЪ изЪ каждой тяжелой точки опустивЪ перпендикуляры на тѣ плоскости, сыщи сумму моментовЪ относительно кЪ каждой плоскости, и раздѣливЪ каждую

изъ сихъ суммъ на сумму массъ, получишь три разстоянія центра тяжести отъ каждой плоскости.

Со всѣмъ тѣмъ надобно помнить, что естьли тѣла будутъ находиться съ разныхъ сторонъ точки или линеи или плоскости, относительно къ которой разсматриваются моменты; то должно брать съ противными знаками моменты тѣхъ, которыя будутъ находиться съ противоположныхъ сторонъ.

238. Помѣстимъ здѣсь замѣчаніе, которое выходитъ непосредственно изъ теперешнихъ нашихъ разсужденій, и которое во многихъ случаяхъ можетъ сократить трудъ при опредѣленіи центра тяжести, равно какъ и при другихъ изысканіяхъ

Поелику разстояніе центра тяжести равно суммѣ моментовъ, раздѣленной на сумму массъ; и потому естьли точка, линея, или плоскость, относительно къ которой принимаются моменты, проходятъ чрезъ центръ тяжести, то разстояніе это должно быть равно нулю, и сумма моментовъ также. Слѣд. вообще *сумма моментовъ относительно къ какой нибудь плоскости, проходящей чрезъ центръ тяжести, равняется нулю.*

239. Доселѣ мы разсматривали тѣла точками, и видѣли, какъ опредѣляется общій центръ тяжести произвольнаго числа ихъ. А какъ тѣло всякой величины и всякой фигуры есть ничто иное, какъ совокупленіе безчисленнаго множества другихъ тѣлъ или матеріальныхъ частей, которыя можно принимать точками; то вообще должно опредѣлять центръ тяжести тѣла всякой фигуры такимъ же образомъ, и мы это немедленно покажемъ въ примѣрахъ.

А поелику центръ тяжести представляетъ не иное что, какъ точку, по которой проходитъ составное усиліе всѣхъ частей тѣла, повинующихся законамъ тяжести своей, и притомъ составное усиліе равно всѣмъ частнымъ; то заключимъ отсюда, что можно допустить вѣсъ тѣла соединеннымъ въ центръ тяжести его, и что вѣсъ производитъ въ этой точкѣ тоже дѣйствіе, какое бы онъ способенъ произвести въ ней, будучи раздѣленъ по всѣмъ частямъ тѣла.

240. Слѣд. для опредѣленія общаго центра тяжести многихъ тѣлъ всякой фигуры, должно сыскать сначала центръ тяжести каждаго особо; потомъ принявъ вѣсъ каждаго тѣла заключеннымъ въ центрѣ тяжести

его, найти общій центрѣ всѣхѣ, какѣ бы тѣла состояли изѣ точекѣ, расположенныхѣ по тѣмѣ мѣстамѣ, гдѣ находится частной центрѣ тяжести каждаго.

241. Все сказанное нами доселѣ обѣ общемѣ центрѣ тяжести многихѣ тѣлѣ, разсматриваемыхѣ точками, относится равно кѣ тѣламѣ всякой фигуры; только вѣ изчисленіи моментовѣ за разстояніе каждаго тѣла должно принимать разстояніе частнаго центра тяжести его.

242. И потому *естьли многія тѣла, не смотря на фигуру ихѣ, будутѣ имѣть частные центры тяжести своей на одной прямой линеѣ или вѣ одной плоскости; то общій центрѣ тяжести ихѣ будетѣ также на той прямой линеѣ или вѣ той же плоскости.*

243. Приступимѣ кѣ примѣрамѣ:

Положимѣ, что *AB* (*фиг.* 56) представляетѣ линею одинаково тяжелую, которой требуется сыскать центрѣ тяжести. Нѣтѣ ни малаго сумнѣнія, что эта точка должна находиться на серединѣ данной линеи; естьлижѣ нужно опредѣлить ее по правиламѣ, то поступай такѣ.

Вообрази эту линею раздѣленною на безконечное число частей такихѣ, какова *Pp*; умножь каждую на разстояніе ея отѣ какой нибудь постоянной точки, на примѣрѣ на разстояніе ея отѣ конца *A*; возьми сумму сихѣ произведеній и раздѣли ее на сумму частей *Pp*, то есть, на линею *AB*. И такѣ представивѣ *AB*

чрезъ a, AP чрезъ x, получимъ $Pp = dx$; моментъ Pp будетъ xdx; для опредѣленія суммы моментовъ интегралю количество xdx; сумма эта будетъ состоять изъ $\frac{x^2}{2}$; а чтобъ получить ее во всемъ пространствѣ линеи, то должно предположить $x = a$; слѣд. $\frac{a^2}{2}$ будетъ представлять всю сумму моментовъ; и такъ раздѣливъ сумму сію на сумму массъ a, получимъ въ $\frac{a}{2}$ разстояніе центра тяжести отъ точки A. Слѣд. центръ тяжести всякой прямой линеи одинаково тяжелой заключается по серединѣ ея.

244. Отсюда явствуетъ 1е *что для опредѣленія центра тяжести въ окруженіи всякаго многоугольника* (*фиг.* 57), должно провести изъ середины каждаго бока перпендикуляры къ двумъ постояннымъ линеямъ AB, AC, начерченнымъ въ плоскости того же многоугольника; и принявъ вѣсъ каждаго бока соединеннымъ въ серединѣ его, сыскать общій центръ тяжести ихъ, какъ было показано (230).

245. 2е. *Центръ тяжести площади всякаго параллелограмма заключается на серединѣ линеи, которая соединяетъ середины двухъ противоположныхъ боковъ его.* Ибо естьли вообразимъ этотъ параллелограммъ состоящимъ изъ матеріальныхъ линей, параллельныхъ къ двумъ означеннымъ бокамъ, то каждая изъ нихъ будетъ имѣть центръ тяжести своей на линеѣ, которая проходитъ чрезъ середины тѣхъ же двухъ боковъ. Общій центръ тяжести всѣхъ этихъ линей будетъ также на ней. Онъ будетъ сверхъ того на серединѣ ея, потому что эта линея, которую принимаемъ мы содержащею вѣсъ всѣхъ прочихъ, вездѣ одинаково тяжела.

246. 3е. *Для опредѣленія центра тяжести въ площади какого нибудь треугольника ABC* (*фиг.* 58), должно изъ верху его A провести къ серединѣ D противуположнаго бока BC прямую AD; и взять, щитая отъ точки D, часть $DG = \frac{1}{3} AD$.

Въ самомъ дѣлѣ прямая линея AD, раздѣляющая BC пополамъ въ точкѣ D, раздѣляетъ также пополамъ и всякую другую MN параллельную съ BC; слѣд. вообразивъ площадь треугольника такою, которая состоитъ изъ совокупленія многихъ матеріальныхъ линей, параллельныхъ съ BC, можно заключить, что линея AD, проходящая чрезъ частные центры тяжести всѣхъ сихъ линей, должна пройти также и чрезъ общій (231), то есть, чрезъ центръ тяжести треугольника; по той же причинѣ линея CE, проходящая чрезъ середину AB, пройдетъ и чрезъ центръ тяжести треугольника; слѣд. этотъ центръ долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія G двухъ линей CE и AD. Естьли проведемъ линею ED, то она будетъ параллельна съ AC, потому что она раздѣлитъ пополамъ каждой бокъ треугольника AB, BC. Два треугольника EGD, AGC и ABC, EBD будутъ подобны, и потому получимъ $GD : AG = ED : AC = BD : BC = 1 : 2$; слѣд. GD показываетъ половину AG, и состоитъ изъ одной трети AD.

247. Заключимъ отсюда, что *для опредѣленія центра тяжести G въ трапеціи* (*фиг.* 59), должно чрезъ середины E и F двухъ параллельныхъ боковъ CD и AB провести линею EF, и отъ тѣхъ же точекъ протянуть къ двумъ противуположнымъ угламъ A и D линеи EA, FD; наконецъ сдѣлавъ $Eg = \frac{1}{3}EA$ и $Fg' = \frac{1}{3}FD$, провести gg', которая прорѣжетъ EF въ искомой точкѣ G.

Ибо разсуждая здѣсь такимъ же образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ относительно къ треугольнику, увидимъ, что центръ тяжести G долженъ находиться на EF. А поелику g и g' представляютъ (246) частные центры двухъ треугольниковъ CAD, ADB, составляющихъ трапецію $ABDC$; то общій центръ тяжести ихъ или центръ трапеціи долженъ быть на gg' (231); слѣд. онъ долженъ быть въ точкѣ пересѣченія G.

Опредѣлимъ разстояніе FG.

Проведемъ линеи gh и $g'h'$ параллельныя съ AB. Поелику $gE = \frac{1}{3}AE$ и $Fg' = \frac{1}{3}FD$, то получимъ $gh = \frac{1}{3}AF$ и $g'h' = \frac{1}{3}ED$, или $gh = \frac{1}{6}AB$ и $g'h' = \frac{1}{6}CD$; по той же причинѣ $Eh = \frac{1}{3}EF$, $Fh' = \frac{1}{3}EF$, и слѣд.

$hh' = \frac{1}{3}EF$. Но изъ подобія треугольниковъ Ghg и $Gh'g'$ выходитъ $gh : Gh = g'h' : Gh'$; слѣд. $gh + g'h' : Gh + Gh' = g'h' : Gh'$, то есть, $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD : \frac{1}{3}EF = \frac{1}{2}CD : Gh'$; слѣд. $Gh' = \frac{\frac{1}{3}EF \times CD}{AB + CD}$; слѣд. $FG = Fh' + Gh'$ будетъ $= \frac{1}{3}EF + \frac{\frac{1}{3}EF \times CD}{AB + CD}$; то есть, $FG = \frac{\frac{1}{3}EF \times (AB + 2CD)}{AB + CD}$.

Замѣтимъ мимоходомъ, что естьли высота трапеціи случится безконечно мала, и противоположные бока AB и CD будутъ почти равны, то разстояніе FG превратится въ $\frac{\frac{1}{3}EF \times 3AB}{2AB}$ или въ $\frac{1}{2}EF$; то есть, центръ тяжести въ такомъ случаѣ будетъ находиться въ равномъ разстояніи отъ двухъ противуположныхъ основаній.

248. Не трудно *найти центръ тяжести и для площади всякаго многоугольника* (*фиг.* 60). Должно раздѣлить его на треугольники, и опредѣлить центръ тяжести каждаго, какъ было показано выше; потомъ найти общій центръ тяжести всѣхъ сихъ треугольниковъ, принимая ихъ за массы, пропорціональныя къ ихъ площади, и сосредоточныя въ частномъ центрѣ; а это сдѣлай, какъ было предписано (230).

Отсюда явствуетъ, какимъ образомъ должно опредѣлять центръ тяжести для поверхности всякаго тѣла, ограниченнаго плоскими сторонами.

249. Впрочемъ не всегда нужно употреблять моменты для нахожденія центровъ тяжести. На примѣръ желая опредѣлить центръ тяжести для окруженія правильнаго пятиугольника $ABCDE$ (*фиг.* 61), могу просто провести изъ какого нибудь его угла A прямую линею AF къ серединѣ F противуположнаго бока CD; потомъ изъ угла E проведу такимъ же образомъ другую къ противуположному боку BC;

пересѣченіе G этихъ двухъ линей будетъ служить центромъ тяжести. Въ самомъ дѣлѣ общій центръ тяжести двухъ боковъ AB AE долженъ неминуемо находиться на середин̂ѣ c линеи ba, проведенной чрезъ середины этихъ боковъ. Общій центръ тяжести двухъ боковъ BC, DE будетъ по той же причинѣ на серединѣ e линеи Id, которая раздѣляетъ ихъ по поламъ. Наконецъ бокъ CD имѣетъ центромъ своей тяжести точку F.

Но не трудно примѣтить, что линея AF проходитъ чрезъ середины c, e и F; слѣд. она проходитъ чрезъ общій центръ тяжести пяти боковъ. Такимъ же образомъ доказано будетъ, что IE проходитъ чрезъ тотъ же центръ; и слѣд. этотъ центръ заключается въ пересѣченіи G линей AF и IE.

250. Перенося разсужденіе наше отъ треугольника къ площади правильнаго пятіугольника, докажемъ, что центръ тяжести сего послѣдняго будетъ находиться въ точкѣ G.

И вообще докажемъ, что центръ тяжести окруженія и площади всякаго правильнаго многоугольника, состоящаго изъ нечетнаго числа боковъ, будетъ находиться въ точкѣ пересѣченія двухъ прямыхъ линей, проведенныхъ изъ двухъ угловъ на середины противуположныхъ имъ боковъ. Когдажъ число боковъ будетъ четное, то центръ тяжести долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія двухъ линей, проведенныхъ чрезъ середины двухъ противуположныхъ боковъ; отсюда слѣдовало бы заключить, естьли бы то нужно было, что центръ тяжести окружности и площади круга заключается въ средоточіи его.

Естьли число линей, поверхностей, тѣлъ и проч. для которыхъ нужно найти общій центръ тяжести, будетъ не такъ велико, то можно въ такомъ случаѣ употребить показанныя (206 и 207) правила. На примѣръ положимъ, что три точки A, B, C (*фиг.* 62) представляютъ центры тяжести трехъ линей, или трехъ поверхностей, или трехъ тѣлъ, которыхъ вѣсъ изображаютъ массы M, N, P. Соединивъ двѣ какія нибудь точки C и B прямою линеею

BC, раздѣли ее въ *D* такъ, чтобъ $N : P = CD : BD$, или $N + P : N = CB : CD$; точка *D* будетъ общимъ центромъ тяжести двухъ вѣсовъ *P* и *N*. Проведи потомъ *DA*, и вообразивъ сумму $N + P$ двухъ массъ сосредоточною въ *D*, раздѣли такимъ же образомъ *DA* въ обратномъ содержанїи двухъ массъ *M* и $N + P$; то есть, такъ, чтобъ $N + P : M = AE : DE$, или $N + P + M : M = AD : DE$; точка *E* будетъ центръ тяжести трехъ вѣсовъ *M*, *N*, *P*. Такимъ же образомъ поступать должно съ большимъ числомъ тѣлъ.

251. Соображаясь съ предыдущими рѣшенїями, не трудно теперь найти центръ тяжести для поверхности и толщины всякой призмы и всякаго цилиндра.

Центръ сей безъ сумнѣнїя долженъ находиться по серединѣ линеи, проходящей чрезъ центры тяжести двухъ противуположныхъ основанїй; потому что означенныя тѣла стоятъ изъ слоевъ совершенно равныхъ и подобныхъ основанїю, которыя можно почитать за столько равныхъ вѣсовъ, сколько ихъ будетъ числомъ, однообразно раздѣленныхъ по той линеи.

252. *Для опредѣленїя центра тяжести G въ треугольной пирамидѣ SABC (фиг. 63)*, должно изъ верху ея провести къ центру тяжести *F* основанїя прямую линею *SF*, и взять на ней, считая отъ точки *F*, часть $FG = \frac{1}{4}SF$.

Вотъ причина. Естьли изъ середины *D* бока *AB* проведемъ *DC*, *DS*, и сдѣлаемъ $DF = \frac{1}{3}CD$, а $DE = \frac{1}{3}DS$, то точки *F* и *E* будутъ служить центрами тяжести двумъ треугольникамъ *ABC*, *ASB*.

Естьли по допущенїи сего вообразимъ пирамиду, состоящую изъ матерїальныхъ плоскостей параллельныхъ *ABC*; то линея *SF*, преходящая чрезъ точку *F* основанїя, должна пройти такъ же въ каждомъ слою чрезъ такую точку, которая будетъ расположена одинакимъ образомъ съ точкою основанїя. Слѣд. частные центры тяжести каждаго слоя будутъ всѣ находиться на линеи *SF*. По той же при-

чинѣ частные центры тяжести параллельныхъ слоевъ съ ABS, изъ которыхъ пирамида можетъ состоять также, будутъ всѣ заключаться на линеи EC. Слѣд. центръ тяжести пирамиды находится въ точкѣ G, гдѣ обѣ линеи FS и EC пересѣкаются. Но естьли проведемъ FE. то она будетъ параллельна съ CS, потому что DF слѣлана равна $\frac{1}{3}DC$, а $DE = \frac{1}{3}DS$, и слѣд. двѣ послѣднія линеи DC и DS пересѣчены пропорціонально. Треугольники FEG, GCS и два другіе DFE, DCS будутъ подобны, и выводятъ $FG : GS = FE : CS = DF : DC = 1 : 3$; слѣд. FG состоитъ изъ трети GS или изъ четверти FS.

253. Поелику всякое тѣло можно раздѣлить на треугольныя пирамиды, которыхъ центры тяжести будутъ всегда извѣстны; то нетрудно теперь посредствомъ моментовъ найти центръ тяжести всякаго тѣла.

254. Вотъ общій способъ для опредѣленія центровъ тяжести всякихъ фигуръ или тѣлъ, когда части ихъ не будутъ зависѣть однѣ отъ другихъ, или по крайней мѣрѣ когда не будетъ изображенъ законъ зависимости ихъ. Но когда части фигуръ или тѣлъ будутъ имѣть взаимное отношеніе, которое можно изобразить уравненіемъ; тогда центръ тяжести опредѣляется легчайшимъ образомъ. Вотъ примѣры:

255. Будемъ искать вопервыхъ центръ тяжести G для какой нибудь дуги кривой линеи AM, (*фиг.* 64). Для этого должно вообразить безконечно малую дугу Mm, и взять за ось моментовъ какую нибудь линею CN параллельную съ ордонатами, которыя предполагаются здѣсь параллельными и между собою. Положимъ, что разстояніе отъ C до начала A абсциссъ равно b. Для опре-

дѣленія разстоянія Gg центра тяжести отъ оси CN, должно взять сумму моментовъ дугъ Mm относительно къ оси CN, и раздѣлить ее на сумму дугъ Mm, то есть, на дугу AM. Но какъ дуга Mm предполагается безконечно малою, то разстояніе середины ея n отъ прямой линеи CN должно почитать равнымъ MN. Слѣд. получимъ $Mm \times MN$ за моментъ этой малой дуги. Представивъ AP чрезъ x, PM чрезъ y, будемъ имѣть (73) $Mm = \ldots \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, и $MN = CP = b - x$; слѣд. $(b - x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ будетъ представлять моментъ малой дуги Mm, а $\int (b-x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, или интегралъ $(b - x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ сумму моментовъ всѣхъ дугъ безконечно малыхъ Mm, изъ которыхъ состоитъ цѣлая дуга AM. Слѣд. $Gg = \frac{\int (b - x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{AM}$. Чтожъ касается до дуги AM, раздѣляющей это количество, то мы показали (73) способъ опредѣлять ее въ точности, естьли можно; а (85) опредѣлять ее чрезъ приближеніе.

Разсуждая такимъ же образомъ найдемъ, что разстояніе Gg' центра тяжести отъ оси AP будетъ состоять изъ $\frac{\int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{AM}$.

Таковы суть общія формулы для опредѣленія центра тяжести дуги всякой кривой линеи.

256. Естьли дуга, для которой ищемъ центръ тяжести, состоитъ изъ двухъ частей равныхъ и подобныхъ AM, AM' (*фиг.* 65), лежащихъ по обѣ стороны оси абсциссъ; то явствуетъ, что центръ тяжести ея G будетъ находиться на прямой линеѣ AP; и слѣд. стоитъ только найти разстояніе его отъ точки C. Но какъ безъ сумнѣнія дуги Mm, $M'm'$ относительно къ оси NN' равны, то и разстояніе CG будетъ $= \frac{2\int (b - x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{MAM'}$.

Допустимъ для примѣра, что MAM' есть дуга круга; и потому будемъ имѣть $y = \sqrt{(ax - xx)}$, предположивъ діаметръ равнымъ a. А какъ видѣли мы (57), что $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, то получимъ $2\int (b - x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \ldots\ldots$ $\frac{2\int \frac{1}{2}a\,(b - x)\,dx}{\sqrt{(ax - xx)}} = a\int (b - x)\,dx\,(ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Положимъ для легкости точку C центромъ, тогда $AC = b = \frac{1}{2}a$, и слѣд. получимъ $2\int (b - x) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a\int (\frac{1}{2}a - x)\,dx\,(ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = a\sqrt{(ax - xx)}$ (66) такой интегралъ, къ которому не нужно прибавлять постояннаго количества, потому что оно, когда $x = o$, уничтожается; ибо въ такомъ случаѣ не выходитъ никакой суммы моментовъ.

И такъ получаемъ наконецъ $2\int (b - x)\, dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a \sqrt{(ax - xx)}$, и слѣд. $CG = \frac{a \sqrt{(ax - xx)}}{MAM'} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2 \sqrt{(ax - xx)}}{MAM'} = \frac{CA \times MM'}{MAM'}$; отсюда выходитъ слѣдующая пропорція $MAM' : MM' = CA : CG$, которая показываетъ, что разстояніе центра круга отъ центра тяжести какой нибудь дуги его состоитъ изъ четвертой пропорціональной линеи къ длинѣ дуги, хордѣ ея и радіусу.

Можно примѣнить эти формулы ко всякой другой кривой линеи; но мы сдѣлаемъ напередъ переходъ къ центрамъ тяжести плоскихъ поверхностей, ограниченныхъ кривыми линеями.

257. Естьли потребуется узнать центръ тяжести для площади APM (*фиг.* 66); то предположивъ, что G представляетъ сей центръ, должно для опредѣленія разстоянія Gg взять сумму моментовъ маленькихъ трапецій $MPmp$ относительно къ CN и раздѣлить ее на сумму тѣхъ же трапецій, то есть, на пространство APM. А какъ центръ тяжести i сей маленькой трапеціи долженъ находиться на серединѣ прямой линеи nk равно удаленной отъ MP и mp, на такой серединѣ, которую можно принять за середину MP по причинѣ безконечно малой высоты Pp; слѣд. разстояніе $il = CP$. И такъ

моментъ $Ppm M$ относительно къ NC будетъ $Ppm M \times CP$, то есть, $(b-x)\,ydx$, по предположеніи $AC = b$ и $AP = x$; слѣд. сумма моментовъ будетъ $\int (b-x)\,ydx$, а разстояніе $Gg = \frac{\int (b-x)\,ydx}{APM}$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что разстояніе $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2} y^2 dx}{APM}$.

258. Вообще можно опредѣлить центръ тяжести всякаго пространства, раздѣливъ его на трапеціи безконечно малыя.

На примѣръ естьли будетъ надобно сыскать его въ треугольникѣ ANN' (фиг. 67); то принявъ основаніе NN' и высоту AC за оси моментовъ, и представивъ AP чрезъ x, MM' чрезъ y, а AC чрезъ b, получимъ $MM'm'm = ydx$; моментъ этой трапеціи относительно къ NC будетъ $(b-x)\,ydx$. Такимъ образомъ разстояніе Gg центра тяжести отъ основанія должно состоять изъ $\frac{\int (b-x)\,ydx}{AMM'}$. Но положивъ основаніе равнымъ c получимъ $AC : AP = NN' : MM'$, то есть, $b : x = c : y = \frac{cx}{b}$; слѣд. $\int (b-x)\,ydx$ обратится въ $\int (b-x)\frac{cxdx}{b}$, или въ $\int \frac{c}{b}(bxdx - x^2dx)$, въ количество равное $\frac{c}{b}\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, или $\frac{cx^2}{6b}(3b-2x)$. А какъ площадь

AMM' состоитъ изъ $\frac{MM' \times AP}{2}$, или изъ $\frac{cx^2}{2b}$, то разстоянїе центра тяжести будетъ равно . . . . . . $\frac{\frac{cx^2}{6b}(3b - 2x)}{\frac{cx^2}{2b}}$, или $\frac{1}{3}(3b - 2x)$; но это выраженїе по допущенїи $x = b$, превращается въ $\frac{1}{3}b$. Слѣд. $Gg = \frac{1}{3}b$. Естьли проведемъ линею AGL, то по причинѣ подобныхъ треугольниковъ ACL, GgL получимъ $LG : LA = Gg : AC = \frac{1}{3}b : b = 1 : 3$; слѣд. $LG = \frac{1}{3}LA$, что въ точности сходствуетъ съ доказаннымъ (246).

259. Примѣнимъ теперь формулы къ кривымъ линеямъ.

Положимъ, что APM (*фиг.* 68) представляетъ часть круга, котораго дїаметръ равенъ a, а точка C центръ его; послѣ чего выходитъ $b = \frac{1}{2}a$, и $y = \sqrt{(ax - xx)}$. Слѣд. количество $\int(b - x)\,ydx$ превращается въ $\int(\frac{1}{2}a - x)\,dx\,\sqrt{(ax - xx)}$, или въ $\int(\frac{1}{2}a - x)\,dx\,(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$, которое (66) допускаетъ интегралъ; сей интегралъ будетъ . . . . $\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$ такое количество, къ которому не нужно прибавлять постоянное, потому что оно уничтожается, когда $x = 0$. Слѣд. получаемъ просто $Gg = \frac{\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}}{APM} = \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}$.

Чтожъ принадлежитъ до Gg', то величина его $\frac{\int\frac{1}{2}y^2dx}{APM}$ будетъ (257) $Gg' = \frac{\int\frac{1}{2}\cdot(ax - xx)\,dx}{APM}$, потому что $y = \sqrt{(ax - xx)}$; а какъ $\int\frac{1}{2}(ax - xx)\,dx$,

или $\int\frac{1}{2}.(axdx - x^2dx)$ равняется $\frac{1}{2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, или $\frac{1}{12}x^2(3a - 2x)$, то получимъ наконецъ $Gg' = \frac{\frac{1}{12}x^2(3a-2x)}{APM}$.

Естьли дѣло будетъ итти о центрѣ тяжести G (*фиг* 65) цѣлаго сегмента, то онъ находится на радїусѣ CA, которой раздѣляетъ дугу на двѣ равныя части, и притомъ удаленъ отъ NN' на такое же разстоянїе, какъ оба частные центра двухъ полусегментовъ APM, APM'; слѣд. $CG = \ldots\ldots \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{AP} = \frac{\frac{1}{24}.8.(PM)^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24}(MM')^3}{APM} = \ldots\ldots \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{2APM} = \frac{\frac{1}{12}(MM')^3}{AMM'A}$; то есть, *разстоянїе центра круга отъ центра тяжести площади всякаго сегмента его равняется двенадцатой части куба изъ хорды, раздѣленнаго на площадь того же сегмента.*

260. Что принадлежитъ до центра тяжести сектора $CMAM'$ (*фиг.* 69); то можно опредѣлить его, замѣтивъ, что центръ тяжести G сегмента MAM', G' сектора и G'' треугольника находятся всѣ на радїусѣ CA, и что по правилу моментовъ, моментъ сектора долженъ быть равенъ моменту сегмента, вмѣстѣ съ моментомъ треугольника; слѣд. $CMAM' \times CG' = MAM' \times CG + CMM' \times CG''$.

А какъ мы нашли, что $CG = \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}$ такому количеству, которое можно перемѣнить въ $\frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{2APM} = \frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{MAM'}$; то $CG \times MAM' = \frac{2}{3}(PM)^3$. Притомъ же извѣстно, что $CMM' = PM \times CP$, и (246) $CG'' = \frac{2}{3}CP$; слѣд. $CMM' \times CG''$ превращается въ $\frac{2}{3}PM \times$

$(CP)^2$. По вставкѣ сихъ величинъ найдемъ, что $CMAM' \times CG' = \frac{2}{3}(PM)^3 + \frac{2}{3}PM \times (CP)^2 = \frac{2}{3}PM [(PM)^2 + (CP)^2] = \frac{2}{3}PM \times (CM)^2$, ибо треугольникъ CPM есть прямоугольной. Слѣд. $CG' = \frac{\frac{2}{3}PM \times (CM)^2}{CMAM'}$. А поелику площадь сектора $CMAM'$ состоитъ изъ дуги MAM', умноженной на $\frac{CM}{2}$; и потому $CG' = \frac{\frac{2}{3}PM \times (CM)^2}{\frac{MAM' \times CM}{2}} = \frac{\frac{4}{3}PM \times CM}{MAM'} = \frac{\frac{2}{3}MM' \times CA}{MAM'}$; то есть, разстояніе центра круга отъ центра тяжести всякаго сектора его состоитъ изъ четвертаго пропорціональнаго количества къ дугѣ, радіусу и двумъ третямъ хорды.

Можно примѣнить найденныя формулы ко всякой другой кривой линеѣ, на примѣръ къ параболѣ и проч.

261. Посмотримъ теперь на поверхности кривыхъ линей; но ограничимъ изысканія свои одними тѣлами, которыя раждаются отъ обращенія. Соображаясь въ разсужденіяхъ своихъ съ предыдущими членами, примѣтимъ, что центръ тяжести всякой элементарной зоны находится на оси обращенія CA (*фиг.* 70), и именно долженъ быть въ центрѣ P какого нибудь основанія той зоны, которой высоту допускаемъ без-

конечно малою. Но мы видѣли (74), что выраженіе зоны состоитъ изъ $\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, въ которомъ $r : c$ показываетъ содержаніе радіуса къ окружности; слѣд. получимъ (представивъ чрезъ b разстояніе AC отъ начала A абсциссъ до оси NN' моментовъ), $\frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ за выраженіе момента зоны. Такимъ образомъ разстояніе CG центра тяжести G поверхности отъ точки C будетъ, назвавъ S поверхность,

$$\frac{\int \frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{S}.$$

262. Пусть для примѣру надобно сыскать центръ тяжести наружной поверхности прямаго конуса ANN' (фиг. 71), въ которомъ AP представимъ чрезъ x, PM чрезъ y, высоту AC чрезъ b, радіусъ CN основанія чрезъ a и бокъ AN чрезъ e; въ подобныхъ треугольникахъ ACN, Mrm получимъ $AC : AN = Mr : Mm$; то есть, $b : e = dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{edx}{b}$; въ подобныхъ треугольникахъ ACN, APM получимъ также $AC : CN = AP : PM$, то есть, $b : a = x : y = \frac{ax}{b}$; слѣд. $\int \frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ превращается здѣсь въ $\int \frac{c}{r} \times (b - x) \times \frac{ax}{b} \times \frac{edx}{b}$, или въ $\int \frac{cae}{rb^2} (bxdx - x^2dx)$, котораго интегралъ есть

$\frac{cae}{rb^2} \times \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, или $\frac{caex^2}{6rb^2} \times (3b - 2x)$. Но поверхность частицы $AM'LMA$ или S состоитъ (Геом. 220) изъ $\frac{AM}{2} \times$ *окр.* PM; притомъ же $AC : AP = AN : AM = \frac{AP \times AN}{AC}$; слѣд. $S = \frac{AP \times AN}{2AC}$ . . . $\times$ *окр.* $PM = \frac{c}{r} \times \frac{ae}{2bb} xx$. И такъ разстоянїе центра тяжести поверхности $AM'LMA$ отъ точки C равно

$$\frac{\frac{caex^2}{6rb^2}(3b-2x)}{\frac{cae}{2rb^2}x^2},$$ или $\frac{1}{3}(3b - 2x)$, или $b - \frac{2}{3}x$; слѣд. когда $x = b$, или $AP = AC$, разстоянїе CG центра тяжести цѣлой поверхности конуса будетъ въ такомъ случаѣ $= b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}b$; то есть, центръ тяжести для поверхности конуса служитъ тотъ же, какой для треугольника ANN'.

263. Возьмемъ вторымъ примѣромъ шаръ (фиг. 72) на сей случай будемъ имѣть $y = \sqrt{(ax - xx)}$ уравненїе, въ которомъ a означаетъ дїаметръ, ... и $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$; слѣд. $\int\frac{c}{r}(b-x)y$ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ превращается въ $\int\frac{c}{r}(b-x) \times \frac{1}{2}adx$. По предположенїи точки C центромъ шара, b становится $= \frac{1}{2}a$, и слѣд. $\int\frac{c}{r}(b - x) \times \frac{1}{2}adx = \int\frac{ca}{2r}$ $(\frac{1}{2}adx - xdx)$, котораго интегралъ выходитъ . . . . $\frac{ca}{2r}(\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}xx)$, или $\frac{cax}{2r}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)$. А какъ мы видѣли (75), что поверхность S сферическаго сегмента $AMLM'A$ состоитъ изъ $\frac{cax}{2r}$, то разстоянїе CG цен-

тра C отъ центра тяжести G будетъ $= \ldots .$

$$\frac{\frac{cax}{2r}\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x\right)}{\frac{cax}{2r}} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x = CA - \frac{1}{2}AP;$$ то есть, центръ тяжести G находится по серединѣ G высоты AP даннаго сегмента. Отсюда можно заключить вообще, что центръ тяжести поверхности сферической зоны, заключающейся между двумя параллельными плоскостями, находится на серединѣ высоты ея.

264 Кончимъ изысканіемъ центровъ тяжести тѣлъ.

Естьли принимая тѣло (*фиг.* 70), состоящимъ изъ безконечно тонкихъ и параллельныхъ между собою слоевъ, представимъ вообще чрезъ ss поверхность каждаго слоя, а чрезъ dx высоту его; то получимъ $ssdx$ за выраженіе толщины каждаго слоя, и слѣд. $ss\,(b - x)\,dx$ за моментъ его относительно къ какой нибудь плоскости, параллельной съ слоями и проходящей на разстояніи AC отъ верьху A равномъ b. И такъ назвавъ S толщину $ALMM'A$, получимъ за разстояніе центра тяжести количество $\frac{\int ss\,(b - x)\,dx}{S}$. Но мы показали способъ опредѣлять по интегральному исчисленію величину S; и слѣд. $\int ss\,(b - x)\,dx$ опредѣлится, какъ скоро величина ss будетъ изобра-

жена въ x. Равномѣрно найдемъ разстоянїе центра тяжести отъ двухъ другихъ плоскостей, перпендикулярныхъ между собою и къ первой. Но мы ограничимъ здѣсь себя такими тѣлами, которыхъ каждой параллельной слой имѣетъ центръ тяжести своей на одной и той же прямой линеѣ; именно такими, каковы пирамиды и другїя тѣла, которыя раждаются отъ обращенія.

265. Займемся вопервыхъ пирамидами. Принявъ b за высоту AC какой нибудь пирамиды (*фиг.* 73), x за перпендикулярное разстоянїе AP слоя отъ верху A, ee за площадь основанїя, получимъ (*Геом.* 202) площадь слоя, удаленнаго на разстоянїе x отъ верху по такой посылкѣ, $bb : xx = ee : \frac{eexx}{bb}$; послѣ чего выходитъ $ss = \frac{eexx}{bb}$; и слѣд. $\int ss\ (b - x)\ dx$ превращается въ $\int \frac{ee}{bb}\ (bxxdx - x^3 dx)$, по совершенїи интеграцїи въ $\frac{ee}{bb}\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$, или въ $\frac{eex^3}{12bb}(4b - 3x)$. Но толщина пирамиды, имѣющей x высотою, а ss или $\frac{eexx}{bb}$ основанїемъ, равняется $\frac{eex^3}{3bb}$; слѣд. разстоянїе центра тяжести будетъ $\dfrac{\frac{eex^3}{12bb}(4b - 3x)}{\frac{eex^3}{3bb}}$, или $\frac{1}{4}(4b - 3x)$, или $b - \frac{3}{4}x$. И такъ по предположенїи $x = b = AC$, количество сїе превращается въ $\frac{1}{4}b$; и слѣд. высота Cg' центра тяжести G возвышается отъ основанїя на $\frac{1}{4}b$.

Положимъ теперь, что g представляетъ центръ тяжести основанія; линея Ag должна пройти въ такомъ случаѣ чрезъ центръ тяжести G пирамиды. А какъ по причинѣ параллельныхъ линей Gg' и gC, можно послать Cg' или $\frac{1}{4}b : AC$ или $b = Gg : Ag$; то $Gg = \frac{1}{4}Ag$; но это подтверждаетъ вопервыхъ сказанное нами (252) и показываетъ вмѣстѣ, что центръ тяжести толщины всякой пирамиды состоитъ изъ четверти разстоянія центра тяжети основанія ея отъ верху.

266. Что касается до тѣлъ, которыя раждаются отъ обращенія поверхностей, то величиною ss вообще (78) принимается $\frac{cy^2}{2r}$; почему выраженіе разстоянія центра тяжести такихъ тѣлъ будетъ $\frac{\int \frac{cy^2 (b-x) dx}{2r}}{S}$

267. Примѣнимъ сначала эту формулу къ усѣченному конусу, представляющему часть прямаго (*фиг.* 74).

Возьмемъ m за радіусъ BD самаго большаго основанія, а n за радіусъ AC меньшаго. Естьли вообразимъ линею AQ пареллельно съ высотою CD, пересѣкающую въ точкѣ O радіусъ PM такого слоя MLM', которой находится въ плоскости трапеціи $ACDB$, то получимъ AQ или $CD : BQ = AO$ или $CP : MO$, то есть, $h : m-n = x : y-n$, по представленіи CD чрезъ h, CP чрезъ x, PM чрезъ y; слѣд. $x = \frac{h}{m-n}(y-n)$, а $dx = \frac{hdy}{m-n}$. Но поелику предполагается здѣсь $b = h$; и потому $b - x = h - \frac{h}{m-n}$

$(y-n) = \frac{h}{m-n}(m-y)$; слѣд. $\frac{\int cy^2(b-x)\,dx}{2r} = \frac{ch^2}{2r(m-n)^2}\int y^2(m-y)\,dy = \frac{ch^2}{2r(m-n)^2} \ldots\ldots \left(\frac{my^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)+C = \frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4my^3-3y^4)+C.$

Опредѣляя постоянное количество C замѣтимъ, что интегралъ или сумма моментовъ должна равняться нулю при точкѣ C, то есть, когда $y = n$. По сей причинѣ получимъ $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4mn^3-3n^4) + C = 0$, или $C = \frac{-ch^2}{24r(m-n)^2}(4mn^3-3n^4)$; слѣд. сумма моментовъ отъ C до какой нибудь точки P состоитъ изъ $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4my^3-3y^4-4mn^3+3n^4)$, а отъ C до D изъ $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(4m^4-3m^4-4mn^3+3n^4)$, или $\frac{ch^2}{24r(m-n)^2}(m^4-4mn^3+3n^4)$, или $\frac{ch^2}{24r}(m^2+2mn+3n^2)$. Теперь стоитъ только раздѣлить это количество на толщину усѣченнаго конуса, которую не трудно опредѣлить, какъ было показано (*Алг.* 215).

Естьли пожелаемъ узнать разстояніе CG центра тяжести усѣченнаго конуса $ANN'B$ (*фиг.* 75), въ которомъ сдѣлана цилиндрическая пустота сосредоточно къ оси; то должно изъ найденнаго выраженія момента его вычесть моментъ внутренняго цилиндра, принимая его состоящимъ изъ одной матеріи съ конусомъ; то есть, вычесть произведеніе сего цилиндра на половину высоты его, и раздѣлить остатокъ на толщину пустаго усѣченнаго конуса; способъ опредѣлять толщину сію показанъ (*Алг.* 215).

Не трудно по этимъ же правиламъ опредѣлить центръ тяжести пушки KL (*фиг.* 76), которой три главныя части, заключающіяся между AB, BC, CD представляютъ три пустые усѣченные конуса на подобіе *фигуры* 75. Поелику выраженіе моментовъ этихъ конусовъ, относительно къ основанію ихъ, должно быть изъ предыдущаго извѣстно: то сыщи эти же моменты относительно къ конечной точкѣ K винъ-града, прибавивъ для каждаго произведеніе сходственнаго усѣченнаго конуса на разстояніе большаго его основанія отъ точки K. Къ суммѣ сихъ моментовъ придай моменты тарели, винъ-града и украшеній, исчисленные просто; наконецъ раздѣливъ все на массу орудія, получишь разстояніе центра тяжести отъ крайней точки винъ-града.

268. Возмемъ вторымъ примѣромъ сферическіе сегменты. Представивъ діаметръ шара чрезъ a, абсциссу AP чрезъ x (*фиг.* 77), и ордонату PM чрезъ y, получимъ $yy = ax - xx$. И такъ сумма моментовъ элементарныхъ слоевъ сегмента $AMLM'A$, взятыхъ относительно къ какой нибудь оси NN', будетъ $\int \frac{c}{2r} (b - x)(ax - xx)\,dx$; и слѣд. относительно къ центру C, гдѣ $b = \frac{1}{2}a$, сумма эта будетъ

$$\frac{c}{2r} \int (\tfrac{1}{2}a - x)(ax - xx)\,dx,$$

$$\text{или } \frac{c}{2r} \int (\tfrac{1}{2}aax - \tfrac{3}{2}axx + x^3)\,dx,$$

$$\text{или } \frac{c}{2r} (\tfrac{1}{4}aax^2 - \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{4}x^4),$$

которую можно превратить въ $\frac{c}{8r} x^2 (a - x)^2$. Но $\frac{c}{8r} x^2$ выражаетъ площадь круга, имѣющаго діаметромъ высоту AP сегмента; слѣд. $CP^2 \times$ *кр.* AP

будетъ служить моментомъ сего сегмента относительно къ центру C. И такъ разделивъ сумму сію на толщину сегмента, определенную (*Геом.* 248), получимъ въ частномъ разстояніе центра тяжести даннаго сегмента отъ центра C шара.

Этимъ же способомъ можно определить центръ тяжести G бомбы (*фиг:* 78). Должно изъ момента целой сферы относительно къ какой нибудь точке вычесть моментъ внутренней, и къ остатку прибавить моментъ поддонка (*culot*) относительно къ той же точке; потомъ разделить все на массу бомбы. Естьли отнесемъ моменты къ центру C бомбы, то моментъ каждой изъ упомянутыхъ сферъ будетъ равенъ нулю; след. стоитъ только разделить моментъ поддонка, взятой относительно къ центру C, на массу бомбы; частное покажетъ разстояніе CG центра бомбы отъ центра тяжести ея. Надобно заметить, что уши и проч. не имеютъ щету въ настоящемъ случае.

О Свойствахъ Центровъ тяжести.

269. Изъ разсужденій нашихъ о центрахъ тяжести и о составной силе изъ многихъ параллельныхъ явствуетъ, что естьли все части тела или какой нибудь системы телъ получатъ порознь одинакую скорость, или будутъ стремиться къ движенію съ одинакою скоростію; то составное изъ всехъ движеніе пройдетъ чрезъ центръ тяжести онаго тела или системы телъ; и след. система будетъ двигаться, или будетъ стремиться къ движенію такъ, какъ

бы всѣ массы были сосредоточены въ центрѣ тяжести, и получили тамъ движеніе равное движенію каждой части.

270. Отсюда должно заключить и на оборотъ, что естьли тѣло или система тѣлъ будетъ возбуждена въ центрѣ тяжести какою нибудь силою; то всѣ равныя части той системы получатъ одинакое движеніе и такую скорость, какая выходитъ (153) по раздѣленіи количества движенія, сообщеннаго въ центрѣ тяжести, на цѣлую массу тѣла, или системы тѣлъ.

Въ самомъ дѣлѣ составное движеніе изъ всѣхъ другихъ, которыя сообщены частямъ системы, должно быть одинаково въ количествѣ и направленіи со впечатлѣнною силою. Но естьли нѣкоторыя изъ частей получатъ большую скорость противу другихъ; то найдемъ, что составное движеніе не пройдетъ чрезъ центръ тяжести, въ чемъ увѣримся еще яснѣе ниже.

271. А поелику многія силы, сообщенныя въ одной и той же точкѣ, можно по предыдущимъ правиламъ привести въ одну; то должно заключить вообще, что *ежели нѣкоторыя силы сообщены будутъ въ произвольномъ направленіи центру тяжести какого нибудь тѣла, или системы тѣлъ; то всѣ части системы получатъ равную скорость, которой направленіе будетъ одинаково съ составною силою; сія*

скорость будетъ равна количеству движенія составной силы, раздѣленной на всю массу тѣла или системы тѣлъ.

272. Отсюда должно заключить, что *тѣло до тѣхъ поръ не будетъ вертѣтся около центра своей тяжести, пока можно силы, дѣйствующія на него, привести въ одну, которой направленіе пройдетъ чрезъ центръ тяжести.*

273. Но естьли силы, дѣйствующія на тѣло не можно привести въ одну, или и можно, но направленіе сей послѣдней не будетъ проходить чрезъ центръ тяжести; то всѣ части системы не будутъ въ такомъ случаѣ двигаться общимъ движеніемъ. Со всѣмъ тѣмъ центръ тяжести станетъ двигаться такъ, какъ бы всѣ силы были непосредственно переданы ему. Объ этомъ мы намѣрены теперь посудить.

274. Положимъ сначала, что три тѣла M, N, P (*фиг.* 79) двигаются по параллельнымъ линеямъ AD, BE, CF, которыя будутъ ли находиться въ одной плоскости или не будутъ, до того нѣтъ нужды, и двигаются со скоростями, изображенными чрезъ тѣжъ линеи AD, BE, CF. Положимъ также, что точка G представляетъ центръ

тяжести сихъ тѣлъ, когда они находятся въ A, B, C, а точка G' центръ тяжести ихъ, когда они приходятъ въ положеніе D, E, F; въ это положеніе приходятъ онѣ въ одно время, потому что скорости ихъ изображены чрезъ AD, BE, CF. Естьли проведемъ линею GG', то утверждаю, что она изобразитъ дорогу, по которой центръ тяжести G долженъ слѣдовать во время движенія тѣлъ, и что сей центръ тяжести G будетъ описывать эту дорогу единообразно.

1[е]. *Не трудно примѣтить*, что дорога центра тяжести будетъ параллельна съ линеями AD, BE и проч.; ибо во всякомъ мѣстѣ движенія сего центра, сумма моментовъ относительно къ плоскости, проходящей чрезъ него, должна быть равна нулю (238). Естьли вообразимъ плоскость, проходящую чрезъ точку G параллельно съ направленіями тѣлъ, то и тутъ сумма моментовъ относительно къ этой плоскости неминуемо будетъ равна нулю въ продолженіи всего движенія; ибо тѣла по настоящему предположенію нигдѣ не удаляются въ движеніи своемъ отъ этой плоскости; слѣд. разстоянія ихъ вездѣ должны быть одинаковы, и моменты также; но при началѣ движенія, то есть, когда центръ тяжести

находится въ G, сумма моментовъ равна нулю; слѣд. она должна равняться нулю и во всякомъ другомъ мѣстѣ; и слѣд. центръ тяжести бываетъ всегда въ плоскости, параллельной съ направленіями тѣлъ, которая проходитъ по первому положенію G того центра. А какъ въ теперешнемъ разсужденіи нашемъ положеніе сей плоскости опредѣляется не инымъ чѣмъ, какъ что она должна быть параллельна съ направленіями тѣлъ M, N, P и проходить чрезъ точку G, то можно доказать такимъ же образомъ, что сей центръ будетъ находиться и во всякой другой плоскости параллельной съ направленіями тѣлъ и проходящей чрезъ точку G; слѣд. онъ будетъ находиться въ общемъ сѣченіи сихъ плоскостей; и слѣд. центръ тяжести двигается по линеи GG', параллельной съ направленіями тѣлъ.

2е. Утверждаю, что онъ двигается единообразно, то есть, что во всякомъ положеніи тѣлъ M, N, P и проч.; на примѣръ въ положеніи ихъ a, b, c и проч., и центра тяжести въ g, выходитъ всегда такая пропорція $GG' : Gg = AD : Aa = BE : Bb =$ и проч. то есть, пространства, описанныя въ одно время центромъ тяжести и каждымъ

тѣломъ, будутъ содержаться между собою, какъ ихъ скорости.

Ибо, вообразивъ такую плоскость RS, къ которой бы направленія движеній были перпендикулярны, получимъ по свойству центра тяжести (236), $M \times AH + N \times BI + P \times CL = (M + N + P) \times GK$. По той же причинѣ, когда тѣла будутъ находиться въ D, E, F, получимъ $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times G'K$. Естьли изъ послѣдняго уравненія вычтемъ первое, то будемъ имѣть, замѣтивъ, что $DH - AH = AD$, $EI - BI = BE$ и проч. $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$; и слѣд. по той же причинѣ увѣримся наконецъ, что когда тѣла придутъ въ a, b, c, $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$.

А поелику пространства Aa, Bb, Cc описываются однообразно и въ одно время то онѣ должны (156) содержаться между собою какъ скорости AD, BE, CF; отсюда выходитъ $AD : BE = Aa : Bb$, $AD : CF = Aa : Cc$; слѣд. $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}$, $Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$. Вставивъ эти величины въ послѣднемъ уравненіи, получимъ по уничтоженіи знамена-

теля AD, $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$. Наконецъ раздѣливъ это уравненіе на то, въ которое входитъ GG', выведемъ $Aa = \ldots \frac{Gg \times AD}{GG'}$, а отсюда слѣдующую пропорцію $GG' : Gg = AD : Aa$, которую надобно было доказать.

Замѣтимъ теперь, что изъ уравненія, въ которое входитъ GG', можно вывести $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$. Но линеи AD, BE, CF, GG' представляютъ скорости тѣлъ M, N, P и центра тяжести G; слѣд. $M \times AD$, $N \times BE$ и проч. суть количества ихъ движенія. И такъ предыдущее разсужденіе, которое ни мало не зависитъ отъ числа тѣлъ, заставляетъ заключить вообще: 1е *что естьли тѣла, сколько бы ихъ числомъ ни было, описываютъ однообразно параллельныя линеи, то и центръ тяжести ихъ описываетъ также однообразно линею, параллельную съ ними.* 2е. *Что скорость сего центра равна суммѣ количествъ движенія тѣлъ, стремящихся въ одну сторону, безъ суммы количествъ движенія стремящихся въ про-*

тивную, по раздѣленіи всего на сумму массъ.

275. Естьли нѣкоторыя изъ тѣлъ будутъ находиться въ покоѣ, то скорость ихъ должна равняться нулю, и количество движенія также; почему количество движенія этихъ тѣлъ, уничтожившись въ числителѣ дроби, изображающемъ скорость центра тяжести, перемѣнитъ его; но знаменатель останется тотъ же, и будетъ всегда состоять изъ суммы всѣхъ массъ.

276. Естьли при параллельномъ движеніи многихъ тѣлъ сумма количествъ движенія тѣлъ, стремящихся въ одну сторону, будетъ равна суммѣ количествъ движенія другихъ, которыя стремятся въ противную; то числитель дроби, изображающій скорость центра тяжести, сдѣлается равенъ нулю; и слѣд. общій центръ тяжести ихъ останется въ покоѣ.

277. Поелику количества движенія представляютъ силы (158), и притомъ составная сила изъ многихъ параллельныхъ (219) равна суммѣ дѣйствующихъ или стремящихся дѣйствовать въ одну сторону безъ суммы тѣхъ, которыя дѣйствуютъ или стремятся дѣйствовать въ противную; то за-

ключимъ; что *естьли многія параллельныя силы будутъ сообщены въ разныхъ частяхъ системѣ тѣлъ, то центръ тяжести ея долженъ двигаться такъ, какъ бы всѣ силы были одному ему сообщены непосредственно.*

278. Допустимъ теперь тѣла, сколько бы ихъ числомъ ни было, движущимися по прямымъ линеямъ всячески расположеннымъ. Естьли вообразимъ двѣ линеи перпендикулярныя между собою, и при пересѣченіи ихъ третію перпендикулярную къ ихъ плоскости, то можно всегда раздѣлить скорость каждаго тѣла на три другія параллельныя съ означенными тремя линеями. Но явствуетъ изъ сказаннаго нами выше, что движеніе центра тяжести въ силу параллельныхъ движеній съ какою нибудь изъ этихъ линей, будетъ параллельно съ нею, однообразно, и сверхъ того скорость его будетъ равна суммѣ количествъ движенія (*), принимаемыхъ параллельно съ тою линеею, раздѣленной на сумму массъ. Слѣд. естьли

(*) Мы говоримъ здѣсь сокращенно: сумма количествъ движенія; а надобно бы сказать сумма количествъ движенія тѣлъ, стремящихся въ одну сторону безъ суммы количествъ движенія стремящихся въ противную.

опредѣлимъ по сему правилу движенія центра тяжести параллельно съ каждою изъ трехъ линей, и потомъ приведемъ всѣ три движенія въ одно (это сдѣлать не трудно, потому что всѣ движенія сообщаются въ одной точкѣ); то получимъ въ семъ последнемъ единственную дорогу центра тяжести. Но поелику употребляемыя здѣсь элементы суть самыя силы, которыя получаютъ тѣла параллельно съ тремя линеями, и притомъ единственная сила центра тяжести состоитъ изъ составныхъ трехъ силъ параллельныхъ съ тремя линеями; то она должна быть также равна и параллельна составной изъ всѣхъ силъ, сообщенныхъ всѣмъ тѣламъ; слѣд. заключимъ вообще, что *какія бы ни были направленія и величины силъ, сообщенныхъ разнымъ частямъ системы тѣлъ, но центръ тяжести ея движется всегда, или стремится двигаться такъ, какъ бы всѣ силы были переданы одному ему непосредственно.*

279. Въ предыдущемъ разсужденіи сказали мы, что можно всегда раздѣлить скорость каждаго тѣла на три другія параллельныя съ тремя линеями, находящимися въ извѣстномъ положеніи. Однако естьли направленіе тѣла будетъ параллельно съ

плоскостью двухъ изъ означенныхъ трехъ линей, или будетъ параллельно съ одною изъ самихъ ихъ; то кажется не можно въ первомъ случаѣ раздѣлить ее болѣе, какъ на двѣ силы параллельныя съ двумя только линеями, а во второмъ не можно сдѣлать никакого раздѣленія. Со всѣмъ тѣмъ эта мнимая невозможность не опровергаетъ истинны начальнаго предложенія; ибо не трудно примѣтить, что силу AB (*фиг.* 80), пока она не будетъ параллельна съ линеями PR, PQ, можно всегда раздѣлить на двѣ другія AC, AD параллельныя съ тѣми же двумя линеями; но какъ скоро AB начнетъ приближаться къ параллельности съ PQ, то сила AD по мѣрѣ того будетъ уменьшаться, и наконецъ она превратится въ нуль, когда AB сдѣлается совершенно параллельна съ PQ. Но и тутъ ничто не мѣшаетъ дѣлить ее на двѣ силы такія на примѣръ, изъ которыхъ одна будетъ равна нулю. По той же причинѣ можно раздѣлить ее на три силы параллельныя съ тремя линеями PQ, PR, PS; только двѣ изъ нихъ будутъ равны нулю.

280. Изъ сказаннаго нами теперь и (275) должно заключить, что *центръ тяжести системы тѣлъ останется въ покоѣ,*

когда по раздѣленіи всѣхъ силъ, сообщенныхъ каждой части системы, на три параллельныя съ тремя перпендикулярными линеями, сумма силъ или количествъ движенія, параллельныхъ съ каждою изъ трехъ линей, будетъ равна нулю.

281. Естьли всѣ силы будутъ находиться въ одной плоскости, то довольно въ такомъ случаѣ раздѣлить каждую изъ нихъ на двѣ другія параллельныя съ двумя линеями перпендикулярными между собою и проведенными въ тойже плоскости; ибо перпендикулярныя силы къ плоскости уничтожатся, и слѣд. движеніе центра тяжести по направленію этихъ силъ должно уничтожиться также.

282. Вездѣ въ сказанномъ нами выше предполагали мы каждое изъ тѣлъ, составляющихъ систему, повинующимся совершенно и свободно силѣ, понуждающей его. Также должно принимать тѣла и тогда, когда повстрѣчаются въ движеніяхъ ихъ препятствія; лишь бы сіи препятствія не происходили отъ силы чуждой системѣ, то есть, лишь бы онѣ не были инаго рода съ тѣми, которыя могутъ сообщать сами тѣла взаимно своимъ движеніямъ по образу располо-

женія своег. Это докажемЪ мы по изЪясненіи общихЪ законовЪ равновѣсія тѣлЪ и ихЪ движеній.

ГЛАВНОЕ ПРАВИЛО РАВНОВѢСІЯ ТѢЛЪ.

283. *Какія бы силы (дѣйствующія или сопротивляющіяся) ни были переданы тѣлу, системѣ тѣлЪ, машинѣ и проч. и какія бы направленія эти силы ни получили; но естьли вообразимЪ, что каждая изЪ нихЪ будетЪ раздѣлена на три другія, параллельныя сЪ тремя линеями, проведенными чрезЪ произвольную точку перпендикулярно между собою; то должно для равновѣсія всѣхЪ силЪ, суммѣ (*) дѣйствующихЪ параллельно сЪ каждою изЪ трехЪ линей, равняться нулю.*

Ибо видѣли мы (227), что силы всякаго числа и свойства можно всегда привести вЪ три, которыхЪ направленія будутЪ параллельны сЪ тремя линеями, перпендикулярными между собою. Слѣд. естьли допу-

(*) Мы теперь, прежде и послѣ разумѣемЪ всегда подЪ *суммою силЪ*, сумму тѣхЪ, которыя дѣйствуютЪ, или стремятся дѣйствовать вЪ одну сторону безЪ суммы дѣйствующихЪ, или стремящихся дѣйствовать вЪ противную.

стимъ равновѣсіе между всѣми силами, то должно допустить его и между составными тремя, или предположить, что каждая изъ нихъ равна нулю. А поелику три составныя силы, перпендикулярныя взаимно, не могутъ ни препятствовать себѣ въ движеніи, ни способствовать ему; то каждая изъ нихъ должна быть равна нулю. При томъ же каждая составная равна (223) суммѣ частныхъ, параллельныхъ съ нею; слѣд. въ самомъ дѣлѣ суммы силъ, которыя по раздѣленіи дѣйствуютъ параллельно съ тремя перпендикулярными линеями, должны быть порознь равны нулю.

284. Естьли всѣ силы будутъ направлены въ одной плоскости, то при равновѣсіи сумма силъ параллельныхъ съ каждою изъ двухъ линей, проведенныхъ въ той плоскости перпендикулярно, будетъ равна нулю. А естьли всѣ силы будутъ параллельны между собою, то сумма всѣхъ ихъ должна равняться нулю. Оба эти случая выходятъ непосредственно изъ главнаго предложенія.

285. Замѣтимъ здѣсь, что это предложеніе имѣетъ силу во всякомъ случаѣ равновѣсія; но мы погрѣшимъ, естьли по оному будемъ выводить его. Ибо условія, нужныя

для равновѣсія, бываютъ различны по свойствамъ и по особливымъ расположеніямъ частей расматриваемой системы или машины; мы займемся этимъ въ послѣдующей части сего курса, а теперь будемъ говорить только объ однихъ главныхъ правилахъ.

286. Это правило остается общимъ и генеральнымъ всегда, будутъ ли силы сообщенныя разнымъ частямъ системы дѣйствовать всѣ, или нѣкоторыя только изъ нихъ; а прочія будутъ сопротивляться, наподобіе такихъ силъ, каковы подпоры, неподвижныя точки, поверхности и проч. Ибо сопротивленія сіи равняются дѣйствующимъ силамъ.

ГЛАВНОЕ ПРАВИЛО ДВИЖЕНІЯ.

287. *Какимъ бы образомъ многія тѣла ни перемѣнили настоящихъ движеній своихъ; но естьли вообразимъ движеніе, какое получитъ каждое тѣло въ послѣдующее мгновеніе, сдѣлавшись свободнымъ, раздѣленнымъ на два другія, изъ которыхъ бы одно равнялось тому, какое выходитъ дѣйствительно по перемѣнѣ; то второе должно быть таково, что всѣ тѣла пришли бы въ равновѣсіе, когда бы каждое изъ нихъ не имѣло другаго движенія, кромѣ сего втораго.*

Въ Этомъ нѣтъ сомнѣнія; ибо естьли вторыя движенія не будутъ способны привести систему въ равновѣсіе, то и первыя составляющія не будутъ таковы, каковы должны вытти по перемѣнѣ.

Это правило принадлежитъ Гну д'Аламберту. *Смотри* его Динамику.

Послѣдствія, выводимыя изъ двухъ предидущихъ правилъ относительно къ движенію центра тяжести тѣлъ.

288. Представимъ теперь многія тѣла, будутъ ли онѣ свободны, или соединены между собою всячески, (такъ однакожъ, чтобъ система всѣхъ тѣлъ оставалась сама безъ подчиненія) получившими къ движенію побужденія, которымъ онѣ совершенно повиноваться не могутъ по взаимнымъ препятствіямъ; однако утверждаю, что центръ тяжести будетъ двигаться такъ, какъ бы всѣ тѣла были свободны.

Ибо какое бы движеніе каждой части системы ни было; однако можно всегда раздѣлить сообщенное ей движеніе на два, на одно равное тому, какое она получитъ, и на другое. Но въ силу вторыхъ движеній должно (286) произойти равновѣсію; слѣд. естьли вообразимъ каждое изъ сихъ вторыхъ движеній, раздѣленнымъ на три другія параллельныя съ

тремя перпендикулярными линеями, то сумма силъ, параллельныхъ съ каждою изъ тѣхъ линей, должна (282) быть равна нулю. А поелику дорога, которую центръ тяжести стремится описывать по побужденію каждой силы, равняется (273) суммѣ силъ параллельныхъ съ каждою изъ означенныхъ линей, раздѣленной на сумму тѣлъ; и потому дорога, которую онъ стремится описывать, по причинѣ встрѣтившихся въ системѣ перемѣнъ, происходящихъ отъ взаимнаго дѣйствія частей ея, будетъ также равна нулю; слѣд. центръ тяжести ни мало не участвуетъ въ сихъ перемѣнахъ. Слѣд. онъ движется, какъ бы всѣ части системы повиновались свободно и безъ потери движенія своего силамъ, побуждающимъ ихъ.

И такъ вообще *центръ тяжести тѣла или системы тѣлъ не получаетъ ни малой перемѣны отъ взаимнаго дѣйствія частей того тѣла или системы тѣлъ.*

289. Отсюда заключимъ, что 1е. *какимъ бы образомъ тѣло или система тѣлъ ни обращалось около центра тяжести; однако этотъ центръ остается всегда въ такомъ состояніи, какъ бы тѣло совсѣмъ не обращалось.*

2е. Отсюда же и изъ сказаннаго выше о движеніи центра тяжести свободныхъ тѣлъ

слѣдуетъ; что ежели тѣло всякой фигуры, или совокупленіе тѣлъ будетъ двинуто по направленію *AB* (*фиг.* 81); то центръ тяжести *G* будетъ двигаться по линеѣ *GS* параллельной съ *AB* такъ, какъ бы побужденіе силы было непосредственно ему сообщено по направленію *GS*. И вообще естьли многія силы будутъ дѣйствовать разомъ на разныя точки тѣла, то центръ тяжести будетъ двигаться, какъ бы всѣ силы непосредственно дѣйствовали на него.

290. Слѣд. ежели тѣлу, во время какъ оно получитъ ударъ по направленію *AB*, будетъ сообщенъ въ центрѣ тяжести *G* сила въ противную сторону по направленію *SG*, равная предыдущей; то центръ тяжести останется въ покоѣ. Со всѣмъ тѣмъ прочія части тѣла не останутся въ покоѣ; ибо сообщенныя силы хотя и равны, но не противуположны прямо. Чтожъ касается до движенія; то оно при спокойствіи центра тяжести должно произойти коловратное.

И такъ ежели тѣло получитъ одинъ или многіе удары по направленіямъ, которые не будутъ проходить чрезъ центръ тяжести; то 1е. центръ тяжести будетъ двигаться, какъ бы каждая изъ силъ была ему непосредственно сообщена по направленію, параллельному съ первымъ ея положе-

ніемЪ. 2е. Части тѣла будутЪ обращаться около центра тяжести тогда, когда при тѣхЪ же силахЪ онЪ останется неподвижнымЪ.

Мы опредѣлимЪ коловратныя движенія вЪ слѣдующей части этого курса.

Отсюда можно заключить, что бомба (*фиг.* 78) должна вертѣться около центра тяжести своей, ежели направленія усилія пороха не пройдетЪ точно по оному. Она можетЪ вертѣться и по другимЪ причинамЪ; но эти причины изслѣдуемЪ послѣ.

291. ЗаключимЪ еще, что ежели состояніе центра тяжести перемѣнится (это можетЪ произойти по дѣйствію или сопротивленію новыхЪ силЪ, постороннихЪ тѣлу); то для опредѣленія сей перемѣны должно сыскать составную силу изЪ всѣхЪ, какЪ бы каждая изЪ нихЪ сообщена была вЪ центрѣ тяжести параллельно сЪ настоящимЪ ея направленіемЪ.

Таковы суть общія правила движенія и равновѣсія твердыхЪ тѣлЪ. Практическое употребленіе ихЪ мы покажемЪ вЪ слѣдующей части, а теперь приступимЪ кЪ равновѣсію жидкихЪ.





о РАВНОВѢСІИ *ЖИДКОСТЕЙ и о ТѢЛАХЪ, которыя бываютъ въ нихъ погружены.*

292. Хотя намъ не извѣстно, какъ далеко простирается тонкость частей жидкихъ тѣлъ, однако не можно сомнѣваться въ матеріальности ихъ; и потому общій законъ равновѣсія и законъ движенія, изслѣдованные нами предъ симъ, не приличествуютъ имъ, какъ твердымъ тѣламъ. Но какъ одного равновѣсія здѣсь не довольно, то посмотримъ, нѣтъ ли еще другаго закона также общаго, отъ котораго бы сіе равновѣсіе могло зависѣть.

293. Равновѣсіе состоитъ въ разрушеніи всѣхъ силъ; но какъ намъ не извѣстно, какимъ образомъ части жидкихъ тѣлъ передаютъ взаимно себѣ силы, то мы для постановленія первыхъ началъ прибѣгнемъ къ

опыту, и покажемъ сначала, что намъ всего извѣстнѣе въ разсужденіи этой матеріи. Но прежде всего должно замѣтить два рода жидкихъ тѣлъ. Однѣ изъ нихъ таковы, которыхъ части суть жестки, или могутъ быть почитаемы такими, потому что будучи взяты въ массѣ не могутъ сжиматься, то есть, не могутъ никогда занять меньшой величины (*volume*) противу той, которую онѣ занимаютъ въ естественномъ своемъ состояніи; такова роду есть вода и большая часть напитковъ. Другія же состоятъ изъ частей удобо-сжимательныхъ и эластическихъ, то есть, изъ частей способныхъ занимать меньшое пространство, когда бываютъ къ тому понуждаемы, и опять приходить въ первое свое состояніе, когда причина, приводившая ихъ въ меньшую величину, перестаетъ дѣйствовать; такого роду есть воздухъ. Мы будемъ говорить сначала о жидкостяхъ, которыя не могутъ сжиматься.

294. Посмотримъ вопервыхъ, чему научаетъ насъ опытъ въ разсужденіи равновѣсія жидкихъ тѣлъ.

Положимъ, что *ABCD* (*фиг. 82 и 83*) представляетъ каналъ о трехъ колѣнахъ *AB BC*, *CD* повсюду одинакого діаметра. Есть-

ли вольемъ воду въ колѣно *AB*, то вода пройдетъ чрезъ *BC* въ колѣно *CD*; и послѣ когда перестанемъ лить, приметъ горизонтальное положеніе съ *AD* или *EF*, какое бы впрочемъ склоненіе *BC* колѣна ни было. Сей такъ извѣстный всѣмъ опытъ принимаемъ мы за начало. Посмотримъ теперь на выводимыя изъ него заключенія.

295. Естьли въ наполненномъ каналѣ *ABCD* по *AD*, вообразимъ чрезъ произвольную точку *E* горизонтальную линею *EF*, то не трудно примѣтить, что вѣсъ воды, содержащейся въ *EBCF*, ни мало не будетъ способствовать къ поддержанію колоннъ *AE* и *DF*; ибо самъ опытъ показываетъ, что вода достигнувъ точки *E* въ колѣнѣ *AB*, восходитъ въ колѣнѣ *DC* не далѣе точки *F*, и слѣд. каналъ *EBCF* находится самъ по себѣ въ равновѣсіи; слѣд. равновѣсіе въ цѣломъ каналѣ сохранится и тогда, когда жидкость, содержащаяся въ *EBCF*, потеряетъ вдругъ тяжесть свою. И такъ должно почитать эту жидкость за одно только средство сообщенія между колоннами *AE* и *DF*, то есть, она передаетъ колоннѣ *DF* все то давленіе, какое принимаетъ на себя колонна *AE*; и обратно, она же сообщаетъ колоннѣ *AE* давленіе, производимое на *DF*.

Тожъ самое должно произойти, когда вмѣсто колоннъ *AE* и *DF* примешь два другія давленія одинакой величины; слѣд. можно заключить вообще, что *естьли въ сосудѣ, наполненномъ жидкостію безъ тяжести, сдѣлаешь отверзстіе и по оному произведешь давленіе; то давленіе сіе раздастся равно во всѣ стороны.* Склоненіе колѣна *BC* (*фиг.* 83) не имѣетъ никакой отмѣны отъ *фигуры* 82.

296. И такъ явствуетъ теперь, что давленіе не только раздается во всѣ стороны равно, но еще дѣйствуетъ перпендикулярно на каждую точку поверхности сосуда, содержащаго жидкость. Ибо естьли бы давленіе дѣйствовало на поверьхность не перпендикулярно, то безъ сомнѣнія оно не могло бы уничтожиться сопротивленіемъ той поверхности, которую мы предполагаемъ безъ тренія; слѣд. вышло бы на части самой жидкости такое дѣйствіе, которое сообщась во всѣ стороны (294) причинило бы въ ней по необходимости колебаніе; и слѣд. жидкость никогда не могла бы притти въ равновѣсіе, а это противно опыту.

297. И такъ заключимъ отсюда, что естьли части жидкости, содержащейся въ

какомъ нибудь сосудѣ *ABCD* (*фиг.* 84) открытомъ со стороны *AD*, побуждаемы будучи нѣкоторыми силами, остаются со всѣмъ тѣмъ въ равновѣсіи; то этѣ силы должны быть перпендикулярны къ поверхности *AD*. Ибо жидкость, находящаяся въ равновѣсіи, сохранитъ его и тогда, когда наложишь крышку на сосудъ одинакой фигуры съ поверьхностью *AD*; но мы теперь только видѣли, что силы дѣйствуютъ въ этомъ случаѣ на поверхность *AD* перпендикулярно.

298. Допустивъ силы, дѣйствующія на части жидкаго тѣла, самою тяжестью, заключимъ также, что направленіе сей тяжести должно быть перпендикулярно къ поверхности стоячей воды; и сдѣд. *части тяжелой жидкости должны быть тогда только въ равновѣсіи, когда онѣ придутъ въ одинъ горизонтъ, не смотря на фигуру сосуда, содержащаго ихъ.*

299. Вообразимъ теперь сосудъ *ABCD* (*фиг.* 85), наполненный жидкостію безъ тяжести, закупаренным со всѣхъ сторонъ, кромѣ малѣйшаго отверстія въ *E*. Естьли чрезъ это отверстіе будетъ сдѣлано давленіе, то давленіе, которое послѣдуетъ на всю плоскую поверхность *BC* нимало не будетъ зависѣть ни отъ количества содержа-

жащейся въ сосудѣ жидкости, ни отъ фигуры сосуда; а поелику давленіе сдѣланное въ E раздѣляется равно во всѣ стороны (295), то то, которое потерпитъ BC, будетъ равно давленію производимому въ E, взятому столько разъ, сколько находится точекъ въ BC.

300. По той же причинѣ давленіе, производимое въ E, будетъ дѣйствовать также и на верхнее основаніе AD; сила стремящаяся извергать его, равняется для каждой точки его давленію, дѣйствующему въ E; всякъ поверхность AD будетъ давима перпендикулярно изнутри наружу силою равною тому давленію, которое производится въ E, взятому столько разъ, сколько находится точекъ на AD.

301. Вообразимъ теперь сосудъ $ABCDEF$ (*фиг. 86*), коего часть CD горизонтальна, наполненнымъ тяжелою жидкостію. Утверждаю, что давленіе на дно CD отнюдь не зависитъ отъ количества заключенной въ сосудѣ жидкости; но отъ величины CD и высоты поверхности AF, противуположной основанію CD.

Ибо естьли вообразивъ горизонтальную линею BE, допустимъ содержащуюся въ $BCDE$

жидкость лишенною тяжести ; то изъ сказаннаго (299) неоспоримо слѣдуетъ, что всякая вертикальная нить IK тяжелой жидкости, содержащейся въ $ABEF$, производитъ въ точкѣ K такое давленіе, которое должно раздаться равно по всей жидкости $BCDE$; что это давленіе дѣйствуетъ равно снизу на верхъ, отталкивая дѣйствіе каждой нити, отвѣчающей вертикально разнымъ точкамъ BE; слѣд. нить IK приводитъ одна въ равновѣсіе всѣ прочія нити массы $ABEF$; и слѣд. продолжая принимать массу $BCDE$ безъ тяжести, не находимъ другаго давленія на дно CD, кромѣ происходящаго отъ IK, которое раздаваясь равно по всѣмъ точкамъ CD, причиняетъ тамъ равное давленіе тому, какое происходитъ въ K, взятому столько разъ, сколько находится точекъ въ CD.

Слѣд. Естьли вообразимъ тяжелую жидкость, содержащуюся въ $ACDF$ (*фиг.* 87), раздѣленною на горизонтальные слои ; то верхній слой не можетъ сообщить дну CD инаго дѣйствія кромѣ того, какое сообщаетъ ему нить ab одной высоты съ тѣмъ слоемъ ; тожъ самое должно заключить и о каждомъ другомъ слоѣ ; слѣд. дно CD бываетъ давимо суммою нитей, ab, bc, cd и проч. а поелику это давленіе раздается рав-

но по всѣмъ точкамъ *CD*, то оно равно *CD*, умноженному на сумму давленій, производимыхъ нитями *ab*, *bc*, *cd* и проч. на одну и ту же точку.

Слѣд. 1е. *Естьли жидкость ACDF будетъ однородная, то есть, будетъ состоять изъ частей одного свойства, одинакой тяжести и проч.; то давленіе на дно CD выражается чрезъ CD × ag; то есть, измѣряется вѣсомъ призмы или цилиндра, имѣющаго основаніемъ CD а высотою ag.*

2е. *Естьли жидкость будетъ состоять изъ слоевъ разной густоты; то давленіе на CD изобразится чрезъ CD, умноженное на сумму удѣльныхъ тяжестей каждаго слоя;* на сумму удѣльныхъ тяжестей (*), говорю, а не на сумму вѣсовъ; ибо давленіе зависитъ не отъ количества жидкости, содержащейся въ каждомъ слою, но отъ тяжести свойственной нити,

Надобно между прочимъ замѣтить здѣсь, что все изъясненное нами приличествуетъ во-

---

(*) Должно припомнить здѣсь еще, что подъ удѣльною тяжестью какого нибудь вещества мы разумѣемъ совершенную тяжесть онаго въ извѣстной величинѣ.

обще сосудамъ всякаго роду, будутъ ли они къ верьху ширѣ, а къ низу уже, или напротивъ, какъ показываетъ *фигура* 88. Давленіе, производимое на *CD* жидкостью *ACDF*, одинаково съ тѣмъ, какое бы вышло отъ цилиндра *ECDG*, наполненнаго жидкостью до такой же высоты.

302. Изъ предыдущаго можно заключить, что двѣ жидкости *NHCBFL* и *EFLM* (*фиг.* 89) однородныя, но разной густоты сообщившись въ *FL* какого нибудь сосуда, не прежде придутъ въ равновѣсіе, пока высоты ихъ *EF*, *IK* надъ горизонтальною плоскостью *FL* раздѣленія не будутъ въ обратномъ содержаніи съ удѣльными тяжестями тѣхъ жидкостей. Ибо видѣли мы (298), что жидкость *LFBCGO* можетъ сама по себѣ находиться въ равновѣсіи, и потому остается теперь узнать какимъ образомъ *NHGO* сдѣлаетъ равновѣсіе съ *EFLM*; но для этого надобно, чтобъ давленіе *NHGO* снизу на верьхъ къ сторонѣ *FL* равно было тому, какое дѣлаетъ *EFLM* сверху на низъ въ *FL*. А какъ (301) давленіе, производимое *NHGO* на *FL*, равно вѣсу призмы или цилиндра той жидкости, которая имѣетъ высотою *IK*, а основаніемъ *FL*, и притомъ вѣсъ сей равняется удѣльной тяжести, умноженной на

величину (volume) массы; то представивъ удѣльную тяжесть чрезъ P, получимъ выраженіемъ $P \times IK \times FL$. По той же причинѣ представивъ чрезъ P удѣльную тяжесть жидкости $EFLM$, получимъ $P \times EF \times FL$ за совершенную тяжесть сей жидкости, или за давленіе ея на FL. Слѣд. $P \times IK \times FL$ должно $=$ $p \times EF \times FL$, или $P \times IK = p \times EF$, и слѣд. $P : p = EF : IK$; отсюда явствуетъ, что высоты EF, IK должны быть въ обратномъ содержаніи съ удѣльными тяжестями.

На примѣръ естьли количество $LFBCHN$ будетъ состоять изъ ртути, а $EFLM$ изъ воды; то знавши, что ртуть въ четырнадцать разъ тяжелѣе воды, заключимъ, что высота IK должна представлять четырнадцатую долю EF, какой бы то фигуры сосудъ ни былъ.

303. Изъ сказаннаго нами доселѣ ясно видимъ, что образъ дѣйствія жидкихъ тѣлъ весьма различенъ отъ образа дѣйствія твердыхъ. Ибо жидкость $ACDF$ относительно къ *фигурамъ* 87 и 88 давитъ различно поверхность CD дна; въ первомъ случаѣ она давитъ собственно одною только частію $ECDG$, а во второмъ всѣмъ вѣсомъ цилиндра $ECDG$; но естьли бы это было твердое тѣло, на примѣръ естьли бы жидкость $ACDF$ замерзла, то дно ощутило бы давленіе равное вѣсу всей массы $ACDF$ (*фиг.* 87), а (*фиг.* 88) одному только вѣсу $ACDF$.

304. Надобно здѣсь еще замѣтить, что давленіе жидкости на дно CD совсѣмъ отлично отъ того, которое ощутительно бываетъ рукѣ при переноскѣ сосуда. Ибо для удержанія извергаемаго дна CD (*фиг.* 87) нужно сдѣлать усиліе равное вѣсу цилиндра $ECDG$; для переноски же сосуда надобно употребить силу, равную вѣсу всей воды; объ этомъ мы

будемъ разсуждать послѣ, а теперь покажемъ способо, какъ вычислять давленіе на поверхности плоскія косыя и поверхности кривыя.

305. Положимъ, что *ACDF* (*фиг.* 90 и 91) представляетъ вертикальной разрѣзъ сосуда, которой ограниченъ плоскими или кривыми поверхностями, и склоненными къ горизонту произвольно. Естьли вообразимъ безконечно тонкой слой *abdc*, то можно допустить его безъ тяжести и претерпѣвающимъ давленіе стоящей на немъ жидкости; а какъ это давленіе распространяется равно по всѣмъ точкамъ слоя, и дѣйствуетъ перпендикулярно и одинаково на каждую точку фасовъ *ac*, *bd* силою (301) одной нити *IK*, то давленіе, производимое жидкостью на *bd* изобразится чрезъ $bd \times IK$; и слѣд. тожъ самое должно допустить, когда бы вмѣсто прямой линеи *bd* принята была маленькая поверхность.

306. Итакъ заключимъ вообще, *что давленіе, производимое перпендикулярно на какую нибудь безконечно малую поверхность тяжелою и однородною жидкостію, измѣряется произведеніемъ той поверхности на разстояніе ея отъ горизонтальной линеи AF, и еще на удѣльную тяжесть жидкости.*

307. Слѣд. давленіе жидкости на какую нибудь плоскую поверхность, расположенную всячески, бываетъ равно суммѣ произведеній безкочно малыхъ частей этой поверхности, умноженныхъ порознь на разстоянія ихъ отъ горизонтальной плоскости и на удѣльную тяжесть жидкости. Но по свойству центра тяжести сумма произведеній каждой части на разстояніе ея отъ постоянной плоскости бываетъ равна произведенію всей поверхности, умноженной на разстояніе центра тяжести ея отъ той же плоскости; и потому *давленіе, производимое тяжелою жидкостью на плоскую поверхность косую, измѣряется произведеніемъ той поверхности на разстояніе центра тяжести ея отъ линеи горизонта жидкости и еще на удѣльную тяжесть ея.*

308. Поелику давленія на каждую точку поверхности бываютъ перпендикулярны, и слѣд. параллельны между собою; то составное или цѣлое давленіе должно быть (206) также параллельно имъ; а какъ мы теперь опредѣлили величину составнаго и величину каждаго частнаго давленія, то не трудно по изъясненному (219) опредѣлить, естьли будетъ нужно, точку, по которой проходитъ составное давленіе; но оно какъ

легко примѣтить, не должно проходить чрезъ центръ тяжести *G* той поверхности (*фиг.* 92), а нѣсколько ниже. Одинъ случай исключается отсюда тотъ, когда наклоненная поверхность будетъ безконечно мала.

309. Посмотримъ теперь, что выходитъ изъ всѣхъ этихъ давленій въ вертикальномъ и горизонтальномъ направленіи.

Какой бы фигуры тѣло ни было, однако можно всегда допустить его состоящимъ изъ безчисленнаго множества параллельныхъ слоевъ, и вообразить поверхность окруженія каждаго слоя совокупленіемъ многихъ трапецій, коихъ число въ кривой поверхности бываетъ безконечно. И такъ, чтобъ исчислить давленіе, производимое жидкостью на внутреннія стѣны сосуда, такъ и на наружную поверхность какого нибудь тѣла, погруженнаго въ нее, должно, говорю я, исчислить напередъ давленіе этой жидкости на поверхность трапеціи безконечно малой высоты.

Вообразимъ трапецію *ABCD* (*фиг.* 93), которой два бока *AB* и *CD* параллельны, и высота безконечно мала. Положимъ притомъ, что въ центрѣ тяжести *G* этой трапеціи сообщена сила *P* перпендикулярно

къ плоскости, величиною равная произведенію поверхности этой же трапеціи, умноженной на разстояніе GG' центра тяжести отъ горизонтальной плоскости XZ.

Но для опредѣленія дѣйствія этой силы какъ въ горизонтальномъ, такъ и вертикальномъ направленіи, воображаю по линеѣ CD вертикальную плоскость $CDFE$, а по линеѣ AB горизонтальную $AFEB$. Потомъ опустивъ вертикально линеи CE, DF, пересѣкающія послѣднюю плоскость въ E и F, провожу BE и AF; по направленію GP силы P воображаю такую плоскость KIH, къ которой бы CD была перпендикулярна; и въ которой линеи HGK и HI представятъ сѣченія ея съ двумя плоскостями $ABCD$, $FECD$ (*Геом.* 190) по причинѣ общаго сѣченія CD; наконецъ изъ точки K, взятой на AB и HK, провожу KI перпендикулярно къ плоскости $FECD$; эта линея будетъ также перпендикулярна и къ HI.

По предположеніи сего раздѣляю силу P на двѣ другія, которыя бы находились въ плоскости KIH, и изъ которыхъ бы одна GL была горизонтальна или перпендикулярна къ плоскости $FECD$, а другая GM вертикальна. Потомъ представивъ чрезъ L и M

двѣ эти силы, и начертивъ параллелограмъ $GMNL$ на линеѣ GN, взятой произвольно за дiагональ, получу (201) $P : L : M = GN : GL : GM$, или $= GN : GL : LN$. А какъ бока треугольника GLN перпендикулярны къ бокамъ треугольника KIH, то (*Геом.* 111) оба эти треугольника подобны, и потому $GN : GL : LN = HK : HI : IK$; слѣд. $P : L : M = HK : HI : IK$. Умноживъ последнiе три члена на $\frac{AB + CD}{2} \times GG'$, отъ чего содержанiе ихъ не можетъ перемѣниться, будемъ имѣть $P : L : M = HK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : HI \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG'$.

Замѣтимъ теперь 1е. что $HK \times \frac{AB + CD}{2}$ представляетъ трапецiю $ABCD$. 2е. Что по причинѣ параллельности CE съ DF, и CD съ EF, линея $CD = EF$; и слѣд. $IK \times \frac{AB + CD}{2}$ означая тоже, что $IK \times \frac{AB + EF}{2}$ представляетъ поверхность трапецiи $AFEB$. 3е. А какъ допустили мы высоту трапецiи $ABCD$ безконечно малою, то EF равную CD можно принять за AB

и за CD; и слѣд. $HI \times \frac{AB + CD}{2}$ превращаясь въ $HI \times EF$, изобразитъ поверхность прямоугольника $ECDF$. И такъ $P : L : M = ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. А поелику силу P изобразили мы чрезъ $ABCD \times GG'$, и потому силы L и M изобразятся также чрезъ $ECDF \times GG'$ и $AFEB \times GG'$.

310. Естьли вообразимъ изъ угловъ A, D, C, B перпендикуляры на плоскость XZ, то можно принять ихъ боками усѣченной призмы, которой горизонтальное основаніе на плоскости XZ будетъ представлять $AFEB$, а склоненное самъ параллелограмъ $ABCD$. А какъ AB и CD предполагаются въ безконечно близкомъ разстояніи, то толщина усѣченной призмы должна равняться толщинѣ такой цѣлой, которая будетъ имѣть тожъ горизонтальное основаніе, а высоту GG'; но эта послѣдняя имѣетъ выраженіемъ $AFEB \times GG'$, которое въ точности сходствуетъ съ найденнымъ для вертикальной силы M; слѣд. сила M изобразится толщиною усѣненной призмы, которой склоненнымъ основаніемъ будетъ $ABCD$, а горизонтальнымъ проекція $ABCD$ на горизонтальной плоскости XZ.

341. Представимъ теперь какое нибудь тѣло разсѣченнымъ на безчисленное множество горизонтальныхъ слоевъ, каковы на примѣръ *ABDEabde* (*фиг.* 94), и допустимъ, что площадямъ трапецій, изъ которыхъ состоитъ поверхность окруженія слоя, сообщены, перпендикулярно къ центру тяжести каждой, силы, изображенныя произведеніемъ площади сходственной трапеціи на разстояніе центра тяжести ея отъ горизонтальной плоскости *XZ*. Эти силы не иное что будутъ, какъ давленія тяжелой жидкости на внутреннюю поверхность слоя *ABDEabde*, могущаго помѣститься въ какомъ нибудь сосудѣ; онѣ будутъ также давленіями тойже жидкости на наружную поверхность погруженнаго въ нее тѣла. Но мы видѣли, что по раздѣленіи этихъ силъ на двѣ, на одну вертикальную, а другую горизонтальную, каждая вертикальная сила изображается усѣченною призмою, которая имѣетъ горизонтальнымъ основаніемъ проекцію трапеціи на горизонтальной плоскости *XZ*, а склоненнымъ самую трапецію. Слѣд. сумма вертикальныхъ силъ, или единственная сила, составная изъ нихъ, должна изобразиться суммою всѣхъ усѣченныхъ призмъ; а какъ тоже самое должно произойти съ каждымъ горизонтальнымъ слоемъ, то заключимъ, что. . . .

1ᵉ. *Естьли сосудъ, какой бы то фигуры ни былъ ACDF (фиг. 86), будетъ наполненъ жидкостію по какую нибудь линею AF; то изъ всѣхъ давленій этой жидкости на каждую точку сосуда не произойдетъ другой вертикальной силы, кромѣ изображенной толщиною, или вѣсомъ всей величины, занимаемой жидкостью.*

2ᵉ. *Естьли тѣло AEDBM (фиг. 95), въ которомъ AIBF представляетъ самой большой горизонтальной разрѣзъ, будетъ погружено въ жидкость до какой нибудь глубины; то по изключеніи давленія на верхнюю часть AMB, вертикальное усиліе жидкости къ подъятію этого тѣла будетъ равно вѣсу всей жидкости, содержащейся между горизонтомъ (niveau) XZ, поверхностью AIBFE и поверностью вогнутою, которая произходитъ, когда опустишь перпендикуляры изъ всѣхъ точекъ окруженія AIBF на плоскость XZ.*

Естьли жъ допустимъ давленіе жидкости и на верхнюю часть поверхности самаго горизонтальнаго разрѣза; то сила, которая будетъ давить поверхность вертикально внизъ,

должна быть равна вѣсу величины жидкости, содержащейся между этою же поверхностію, поверхностью $A'F'B'I'$ изъ проекціи ея, и наконецъ поверхностью, которая происходитъ отъ перпендикуляровъ, проведенныхъ изъ всѣхъ точекъ окруженія $AIBF$. Слѣд. естьли изъ перваго вертикальнаго усилія вычтешь второе, то не трудно примѣтить, что тѣло будетъ толкаемо вертикально снизу на верхъ усиліемъ равнымъ вѣсу той величины жидкости, которой оно будетъ занимать мѣсто.

312. И такъ заключимъ вообще, что *тѣло, погруженное въ какую нибудь жидкость, теряетъ такую часть своего вѣса, которая равняется вѣсу извергаемой имъ жидкости.*

313. Теперь остается намъ разсмотрѣть двѣ вещи: вопервыхъ узнать, гдѣ проходитъ вертикальное усиліе, составное изъ давленій жидкости; вовторыхъ изслѣдовать дѣйствія горизонтальныхъ силъ.

Что принадлежитъ до вертикальнаго составнаго усилія, то оно, какъ не трудно примѣтить, должно проходить чрезъ центръ тяжести всей величины изверженной жидкости. Ибо естьли вообразимъ эту величину раздѣленною на безконечное число вертикаль-

ныхъ нитей, то усиліе жидкости для вертикальнаго отталкиванія каждой нити изобразится (311) вѣсомъ величины жидкости, равнымъ той нити. Слѣд. чтобъ опредѣлить разстояніе составнаго усилія отъ какой нибудь вертикальной плоскости, должно умножить массу каждой нити, принимая ее за одинъ составъ съ жидкостью, на разстояніе ея отъ тойже плоскости, и раздѣлить сумму сихъ произведеній на сумму нитей; а какъ это въ точности сходствуетъ съ тѣмъ, что должно сдѣлать для опредѣленія разстоянія центра тяжести въ изверженной величинѣ; то вообще *вертикальное преніе жидкости на тѣло, погруженное въ нее, проходитъ всегда чрезъ центръ тяжести изверженной величины жидкости.*

314. Посмотримъ теперь на дѣйствія горизонтальныхъ силъ.

Естьли вообразимъ въ толстомъ слоѣ (*фиг.* 94) чрезъ бока *ab*, *bc* и проч. нижняго сѣченія вертикальныя плоскости, оканчивающіяся у верхняго сѣченія; то этѣ плоскости представятъ изъ себя окруженіе призмы, имѣющей равную высоту съ слоемъ; каждой фасъ этой призмы изобразитъ (309) пространствомъ поверхности своей величину горизонтальной силы, перпендикулярно дѣй-

ствующей на него. А какъ всѣ эти фасы одной высоты, то поверхности ихъ должны содержаться между собою, какъ ихъ основанія *ab*, *bc* и проч. Слѣд, горизонтальныя силы будутъ содержаться какъ тѣже бока *ab*, *bc* и проч. Поелику же эти фасы принимаются безконечно малой высоты, то въ какомъ бы мѣстѣ ихъ силы ни были сообщены, можно почитать всѣ горизонтальныя силы сообщенными въ горизонтальной плоскости *abcdef*, каждую перпендикулярно къ серединѣ бока, служащаго основаніемъ сходственному фасу разсматриваемой теперь призмы. Говорю, къ серединѣ, ибо не трудно примѣтить, что составное давленіе изъ всѣхъ дѣйствующихъ на поверхность какой нибудь изъ трапецій, составляющихъ поверхность слоя, должно проходить по какой нибудь точкѣ линеи, соединяющей середины двухъ параллельныхъ боковъ; и слѣд. горизонтальная сила, которая выходитъ изъ того, должна пересѣчь линею, соединяющую середины двухъ противуположныхъ боковъ сходственнаго фаса призмы. Теперь остается узнать, что происходитъ съ многоугольникомъ (*фиг.* 96), когда силы будутъ влечь или перѣть каждой бокъ его перпендикулярно къ серединѣ, силы изображенныя ве-

личиною тѣхъ же боковъ. Мы тотчасъ докажемъ, что онѣ уничтожаются взаимно.

Допустимъ сначала двѣ силы P и Q (*фиг.* 97) сообщенными перпендикулярно къ бокамъ AB, AC треугольника ABC, и представимъ ихъ тѣми же боками. Явствуетъ, что составная изъ нихъ пройдетъ чрезъ точку стеченія F, которая въ настоящемъ случаѣ служитъ центромъ кругу, очерченному около трехъ точекъ A, B, C (*Геом.* 55). Утверждаю притомъ, что она должна пройти чрезъ середину бока BC, къ которому будетъ перпендикулярна, и слѣд. изобразится тѣмъ же бокомъ BC.

Ибо естьли раздѣлимъ силу P на двѣ другія на De параллельную и Dh перпендикулярную къ боку BC, составивъ паллелограмъ $Degh$; то получимъ по представленіи чрезъ e и h этихъ двухъ силъ, $P : e : h = Dg : De : Dh = Dg : De : ge$; но естьли опустимъ перпендикуляръ AO, то произойдетъ треугольникъ geD подобный треугольнику AOB, потому что бока ихъ будутъ взаимно перпендикулярны. И потому $Dg : De : ge = AB : AO : BO$; слѣд. $P : e : h = AB : AO : BO$. А какъ по положенію величину сылы P представляетъ AB, то величину e будетъ представлять AO, и слѣд. величину h означитъ линея BO.

Естьли раздѣлимъ такимъ же образомъ силу Q на двѣ, Im параллельную и Ik перпендикулярную къ боку BC; то равномѣрно докажемъ, что AO будетъ представлять силу m, а CO силу k. Двѣ силы m и e должны быть равны, потому что онѣ изображаются одною линеею AO. Притомъ же онѣ дѣйствуютъ къ противныя стороны и по линеѣ DI, параллельной съ BC, ибо D и I суть середины AB и AC; слѣд. онѣ взаимно себя уничтожаютъ. И такъ составная сила должна быть одинакова съ составною изъ двухъ силъ h и k; а какъ эти послѣднія параллельны между собою, потому что онѣ перпендикулярны къ BC, и дѣйствуютъ притомъ въ одну сторону, то составная изъ нихъ должна быть равна суммѣ ихъ и перпендикулярна къ BC. Слѣд. 1е. она изобразится чрезъ $BO + OC$, то есть, чрезъ BC. 2е. А поелику она перпендикулярна къ BC и должна проходить, какъ мы уже сказали, чрезъ центръ F, круга, описаннаго около ABC, то должна также пройти и чрезъ середину BC.

По допущеніи сего составная V (*фиг.* 96) изъ двухъ силъ P и T будетъ также перпендикулярна къ серединѣ BE и изобразится тою же линеею BE. По той же причинѣ

составная сила X изъ двухъ V и S, и слѣд. изъ трехъ P, T, S будетъ перпендикулярна къ серединѣ линеи BD и изобразится ею же. Наконецъ составная Y изъ двухъ X и Q, и слѣд. изъ четырехъ P, T, S, Q будетъ перпендикулярна къ серединѣ DC, и изобразится чрезъ DC; слѣд. она будетъ равна и прямо противуположна силѣ R; слѣд. всѣ сіи силы уничтожатъ себя взаимно.

Это доказательство приличествуетъ во всякомъ случаѣ, какое бы число и величина боковъ ни были.

И слѣд. вообще *горизонтальныя силы тяжелой жидкости, которая вездѣ давитъ поверхность тѣла, погруженнаго въ нее, перпендикулярно, уничтожаютъ себя взаимно.*

315. Таковы суть правила, которыми опредѣляются дѣйствія давленія жидкостей на сосуды, содержащія ихъ, и на тѣла, погружаемыя въ тѣ жидкости. Посмотримъ теперь на нѣкоторыя употребленія сихъ правилъ.

Поелику усилія жидкости въ горизонтальномъ направленіи уничтожаются взаимно, и потому для удержанія даннаго поло-

женія тѣлу въ жидкости, должно уничтожить вертикальное усиліе давленія; но для сего потребны двѣ вещи: вопервыхъ должно противуположить сверьху на низъ усиліе, равное тому, которое происходитъ съ низу на верьхъ; вовторыхъ противуположить это усиліе въ прямой линеѣ съ усиліемъ вертикальнаго оттолкновенія жидкости. Но вертикальное оттолкновеніе жидкости равняется вѣсу величины изверженной жидкости; слѣд. *Естьли величина изверженной жидкости вѣситъ больше погруженнаго тѣла, то тѣло должно всплыть и подняться на такую высоту, чтобъ величина жидкости, сходственная съ погруженною частію, имѣла одинакой вѣсъ съ цѣлымъ тѣломъ.*

316. И такъ естьли къ вѣсу всплывшаго тѣла прибавишь или убавишь какой нибудь другой вѣсъ, то оно углубится, или подымется на такую высоту, пока вѣсъ изверженной жидкости сдѣлается равенъ новому. Естьли этотъ придаваемой или отнимаемой вѣсъ будетъ малъ относительно къ величинѣ извергаемой жидкости, то количество IK (*фиг.* 98), на которое опустится или подымется сѣченіе AB тѣла, будетъ также мало, но само сѣченіе AB сдѣлается больше. Однако въ малыхъ вѣсахъ можно принимать AB и ab равными, и измѣрять вновь извергаемую величину умноженіемъ поверхности AB на IK; то есть, чрезъ $AB \times IK$. И такъ представивъ чрезъ p вѣсъ кубическаго фута жидкости, получимъ въ $p \times AB \times IK$ вѣсъ сей величины,

исчисливъ напередъ $AB \times IK$ въ кубическихъ футахъ. Слѣд. естьли чрезъ P означимъ прибавляемой или отнимаемой вѣсъ, то произойдетъ $p \times AB \times IK = P$; отсюда заключимъ, что $IK = \frac{P}{p \times AB}$. Примѣняя эту выкладку къ понтону, и *желая узнать на какую глубину онъ опустится при поднятіи извѣстнаго бремени*, должно раздѣлить величину P этого бремени на поверхность воднаго сѣченія, исчисленную въ квадратныхъ футахъ, и умноженную на вѣсъ кубическаго фута воды.

317. Можно, оставляя вѣсъ тѣла тотъ же, увеличивать пространство, занимаемое имъ въ жидкости, по произволу. И нѣтъ такой тяжелой матеріи, которую бы не можно было привести въ состояніе плавать.

318. Поелику уменьшая вѣсъ тѣла безъ перемѣны величины его, приводимъ тѣло въ состояніе подыматься съ усиліемъ, равнымъ отнятому вѣсу; то слѣдуетъ отсюда, что можно съ пользою употреблять вертикальное оттолкновеніе воды для подъятія тяжестей, на примѣръ для выемки огнестрѣльныхъ орудій изо дна моря или рѣки; должно, говорю, нагрузивъ какія нибудь судна тяжелыми тѣлами или водою, привязать къ нимъ оныя орудія и послѣ опорожнить тѣ судна отъ даннаго имъ груза.

319. Вообще естьли чрезъ P представимъ удѣльную тяжесть какого нибудь плавающаго тѣла, или то, что вѣситъ кубической футъ его, когда бы оно состояло изъ одного вещества; чрезъ V величину его;

чрезъ p удѣльную тяжесть жидкости, и чрезъ u величину погруженной части; то вѣсъ этого тѣла изобразится чрезъ $P \times V$ или PV; вѣсъ величны жидкости чрезъ pu; и слѣд. получимъ $PV = pu$ уравненіе, изъ котораго выходитъ $u = \frac{PV}{p}$; отсюда явствуетъ, что при одинакомъ вѣсѣ PV тѣла, потопающая часть его тѣмъ менѣе будетъ, чѣмъ удѣльная тяжесть жидкости будетъ больше.

320. Изъ того же уравненія выходитъ $V : u = p : P$; то есть, величина тѣла и погруженной части его находятся въ обратномъ содержаніи съ удѣльною тяжестію тѣла и жидкости.

321. По сему правилу дѣлаются Ареометры или мѣра для жидкихъ тѣлъ. Эти мѣрила поднимаясь или опускаясь на нѣкоторое количество въ извѣстныхъ жидкостяхъ, показываютъ удѣльную ихъ тяжесть.

А чтобъ получить объ этомъ понятіе, то положимъ, что пустой цилиндръ $ABCD$ (фиг. 99) (этотъ цилиндръ обкладывается въ нижней части CD какимъ нибудь тяжелымъ веществомъ для того, чтобъ могъ всегда держаться вертикально), опущенъ будучи въ нѣкоторую жидкость, остановился самъ по себѣ, погрузившись на количество ED. Въ такомъ случаѣ величина жидкости, занятая ча-

стїю цилиндра *EDCF*, должна (312) равняться вѣсу всего тѣла *ADBC*. Но по извѣстному вѣсу *ADBC* можно узнать вѣсъ величины жидкости, равный цилиндру *EDCF*. Слѣд. исчисливъ толщину *EDCF* въ кубическихъ дюймахъ, а вѣсъ *ADCB* въ унцїяхъ, и раздѣливъ потомъ вѣсъ *ADCB* на число кубическихъ дюймовъ *EDCF*, получимъ въ частномъ числѣ вѣсъ одного кубическаго дюйма пробуемой жидкости.

Опредѣливъ удѣльную тяжесть одной жидкости, можно послѣ опредѣлить оную и для другихъ, поступая такъ.

Положимъ, что бокъ *AD* раздѣленъ на многїя равныя части, и что точка *E*, при которой цилиндръ остановился въ извѣстной жидкости, замѣчена. Тогда погружая цилиндръ въ другую жидкость, заключаемъ по количеству *De*, на которое онъ опустится въ сей новой жидкости, что эта жидкость будетъ тяжелѣе первой, когда *De* будетъ меньше *DE*; и напротивъ легче, когда *De* будетъ больше *DE*; то есть, удѣльная тяжесть первой жидкости къ удѣльной тяжести второй должна содержаться (320) какъ *De*: *DE*, такъ что по одному сравненїю чиселъ частей *DA* съ *DE* и *De*, находимъ содержанїе удѣльныхъ тяжестей для двухъ разныхъ жидкостей. Можно еще опредѣлять удѣльныя тяжести иначе такъ: естьли означивъ при точкѣ *E* удѣльную тяжесть извѣстной жидкости, захотимъ послѣ означить при разныхъ точкахъ *e* удѣльныя тяжести другихъ, въ которыя ареометръ будетъ погружаемъ; то должно число частей *DE* раздѣлить на число частей *De*, и умножить частное на удѣльную тяжесть, отвѣчающую при точкѣ *E*; результатъ покажетъ удѣльную тяжесть принадлежащую точкѣ *e*; то есть, покажетъ то число, ко-

торое надобно написать при *e* для означенія удѣльной тяжести той жидкости, въ которой цилиндръ остановился при этомъ раздѣленіи.

Естьли при сравненіи жидкостей, мало въ густотѣ своей различныхъ, употребленъ будетъ цилиндръ изрядной широты; то не трудно примѣтить, что разность погруженій его сдѣлается тѣмъ менѣе, чѣмъ разность густотъ будетъ меньше, а діаметръ цилиндра больше. Въ такомъ случаѣ нужно употреблять цилиндръ весьма малаго поперешника; а чтобъ онъ былъ въ состояніи держаться вертикально, то можно присоединить его къ другому цилиндру *GHIK* (*фиг.* 100), обложенному снизу такъ, какъ показано было выше.

Впрочемъ нѣтъ никакой нужды въ томъ, чтобъ части ареометра *GHIK* и *ABCD* были цилиндрической фигуры. Часть *GHIK* можетъ быть всякой, лишь бы посредствомъ ея ареометръ былъ способенъ стоять перпендикулярно; чтожъ принадлежитъ до части *ABCD*, то можно ее дѣлать всякой призматической фигуры, только бы равныя части величины *ABCD* достаточно отвѣтствовали равнымъ частямъ длины *AC*; и потому можно дѣлать ареометры такой фигуры, какую показываетъ (*фиг.* 101).

Хотя можно дѣлать ареометры различно, однако мы будемъ употреблять здѣсь представленный (*фиг.* 101). Предыдущій означаетъ удѣльныя тяжести жидкостей посредствомъ разныхъ углубленій, сей же опредѣляетъ ихъ по постоянному углубленію.

ABCD есть родъ бутылки съ длиннымъ горломъ, содержащей въ нижней своей части *C* нѣкоторое количество ртути. На концѣ *A* находится блюдцо, въ которое можно класть разныя небольшія

вѣсы. Замѣтка E показываетъ точку, при которой ареометръ остановился по собственной тяжести въ легчайшей жидкости.

Естьли погрузишь ареометръ въ другую жидкость, которая будетъ тяжелѣе первой, то онъ долженъ подняться, и не прежде опустится по замѣтку E, какъ по прибавленіи въ A нѣкотораго вѣсу. Количество сего прибавленія вѣса показываетъ разность удѣльной тяжести между первою и послѣднею жидкостями; и слѣд. по извѣстной тяжести первой можно опредѣлить тяжесть всякой другой.

322. Ежели тѣло вѣситъ больше величины изверженной имъ жидкости, то оно должно потонуть; и слѣд. для поддержанія его нужна сила, равная разности между вѣсомъ его и вѣсомъ такой же величины жидкости. И такъ продолжая представлять чрезъ p и P удѣльныя тяжести жидкости и тѣла, а чрезъ V величину тѣла, получимъ въ $PV - pV$ объявленную разность. Напослѣдокъ привязавъ тѣло на ниткѣ къ коромыслу вѣсковъ, какъ явствуетъ изъ *фиг.* 102, и означивъ чрезъ P' вѣсъ, посредствомъ котораго приходитъ оно въ равновѣсіе, будемъ имѣть $P' = PV - pV$; отсюда выходитъ $\frac{p}{P} = \frac{PV - P'}{PV}$. Но PV есть вѣсъ тѣла въ воздухѣ, а P' вѣсъ его же погруженнаго въ

жидкость; слѣд. *знавши вѣсъ тѣла въ воздухѣ и вѣсъ его въ нѣкоторой жидкости, не трудно опредѣлить содержаніе удѣльныхъ тяжестей тѣла и той жидкости; а именно, должно раздѣлить разность двухъ этихъ вѣсовъ на вѣсъ тѣла въ воздухѣ.*

На примѣръ, естьли тѣло вѣситъ 6 унцій въ воздухѣ и 5 въ водѣ; то раздѣливъ разность 1 на 6, по частному $\frac{1}{6}$ заключимъ, что удѣльная тяжесть тѣла къ удѣльной тяжести воды содержится, какъ 6 : 1.

Воздухъ, будучи самъ тяжелая жидкость, уменьшаетъ также нѣкоторую часть въ вѣсу тѣла; и слѣд. вѣсъ, которой имѣютъ тѣла въ воздухѣ, не можно почитать настоящимъ. Но какъ воздухъ есть жидкость весьма рѣдкая, котораго удѣльная тяжесть составляетъ около 850 части воды; то уменьшеніе, причиняемое имъ въ вѣсахъ, можно почитать за ничто.

323. Естьли опустимъ тожъ тѣло въ другую жидкость, которой удѣльная тяжесть P', и найдемъ, что P'' будетъ вѣсъ, приводящій его въ равновѣсіе; то въ сходственность предыдущаго уравненія $P' =$

$PV - pV$, получимъ въ настоящемъ случаѣ $P'' = PV - p'V$; но изъ двухъ этихъ уравненій выводимъ $pV = PV - P'$, и $p'V = PV - P''$, и слѣд. раздѣливъ послѣднее на предыдущее, получимъ $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$. И такъ знавши вѣсъ PV тѣла въ воздухѣ, вѣсъ P' его въ одной жидкости, и вѣсъ P'' его же въ другой жидкости, можно опредѣлить $\frac{p'}{p}$, то есть, содержаніе удѣльныхъ тяжестей двухъ разныхъ жидкостей.

По симъ-то правиламъ сочинены таблицы удѣльныхъ тяжестей какъ тяжелыхъ, такъ и жидкихъ веществъ. Такого рода таблица прилагается въ концѣ сей книги.

324. Изъ изъясненнаго слѣдуетъ заключить, что удѣльная тяжесть тѣла умножена будучи на удѣльную величину его, даетъ въ произведеніи совершенный его вѣсъ. А поелику плотность или густота, умножена будучи на величину, выводитъ (160) массу, которая (171) бываетъ пропорціональна вѣсу; и потому удѣльная тяжесть, умноженная на величину, пропорціональна плотности, умноженной также на величину. Слѣд. *удѣльная тяжесть тѣлъ пропорціональна ихъ плотности.*

325. Возвратимся кЪ тѣламЪ, которыя всплываютЪ на верхЪ; хотя видѣли мы (315), что тѣло не прежде приходитЪ вЪ равновѣсіе сЪ жидкостью, какЪ когда вѣсЪ всего его сдѣлается равенЪ вѣсу величины изверженной имЪ жидкости; однако сего условія не довольно, но *надобно еще, чтобЪ и линея, проходящая чрезЪ центрЪ тяжести погруженной части тѣла и чрезЪ центрЪ тяжести самаго его, была вертикальна.*

Поелику тяжесть тѣла и оттолкновеніе жидкости дѣйствуютЪ по вертикальнымЪ линеямЪ, изЪ которыхЪ первая проходитЪ чрезЪ центрЪ тяжести тѣла, а другое чрезЪ центрЪ тяжести изверженной жидкости; и потому эти двѣ вещи тогда только могутЪ притти вЪ прямую противуположность (которая нужна для равновѣсія ихЪ), когда обѣ вертикальныя линеи сольются вмѣстѣ.

326. И такЪ, чтобЪ узнать, можетЪ ли тѣло $ACEDB$ (*фиг.* 103) извѣстной фигуры и матеріи находиться вЪ равновѣсіи по данному ему на жидкости положенію; должно провести горизонтальную плоскость CD, отдѣляющую часть CED, которой бы величина содержалась кЪ величинѣ всей AEB, какЪ удѣльная тяжесть тѣла кЪ удѣльной тяжести жидкости, и потомЪ опредѣлить центры тяжести G для AEB и G' для CED; естьли линея GG' будетЪ перпендикулярна кЪ плоскости CD, то требуемое равновѣсіе можетЪ состояться.

327. Мы предполагаемъ здѣсь тѣло AEB состоящимъ изъ однороднаго вещества, которое по всему пространству, занимаемому тѣломъ, раздѣлено равно. Естьлижъ оно не будетъ таково, то должно напередъ исчислить величину жидкости равную вѣсомъ вѣсу всего AEB, и потомъ сдѣлать часть CED равную той величинѣ, такъ однакожъ, чтобъ CD была горизонтальна; вопросъ сей, какъ само по себѣ явствуетъ, принадлежитъ къ Геометріи, и слѣд. по правиламъ этой науки не трудно рѣшить его.

328. По тѣмъ же правиламъ можно рѣшить и слѣдующій другой вопросъ: опредѣлить разныя положенія, въ которыхъ тѣло можетъ быть въ равновѣсіи на жидкости. Но какъ намъ не нужна существенная приноровка ни къ одному изъ этихъ вопросовъ, то мы и не займемся ими.

329. Естьли тѣлу CED (*фиг.* 104), находящемуся въ равновѣсіи на жидкости, которой AB представляетъ поверхность, G центръ тяжести тѣла, а G' центръ тяжести погруженной части его AEB, дано будетъ нѣкоторое безконечно малое склоненіе, такъ что aEb сдѣлается послѣ того погруженною частію, которой G'' будетъ слу-

житъ центромъ тяжести; то утверждаю, что это тѣло приметъ первое положеніе свое, когда вертикальная линея $G''M$, приличная въ семъ второмъ положеніи его, пересѣчется съ вертикальною линеею $G'M$, которая сходствуетъ съ первымъ положеніемъ, выше центра тяжести G самаго тѣла. Напротивъ же оно должно опрокинуться, когда точка M будетъ ниже G, на примѣръ въ M'.

Ибо направленіе $G''M$ оттолкновенія воды, которое должно быть вертикально, не имѣя способу проходить чрезъ центръ тяжести G, будетъ силиться (290) сообщить тѣлу два движенія, одно для поднятія центра тяжести, уничтожающееся вѣсомъ тѣла, а другое стремящееся вертѣть его около центра тяжести G. Но не трудно примѣтить, что это коловратное движеніе будетъ производиться около точки G отъ A къ C, естьли G будетъ ниже M, и слѣд. будетъ силиться привести G' въ настоящій вертикалъ $G''M$. Напротивъ же естьли M будетъ ниже G, на примѣръ въ M', то коловратное движеніе около G будетъ производиться отъ C къ A, и слѣд. будетъ удалять отъ G' къ G'', то есть, будетъ силиться опрокинуть тѣло.

И такъ тѣло можетъ притти въ первое свое положеніе тогда только, когда $G'M$ будетъ больше $G'G$.

Точка M называется *Метацентромъ*, то есть, центромъ предѣла G или высоты, при которой тѣло не можетъ опрокинуться отъ небольшаго склоненія; но какъ скоро G хотя мало будетъ выше M, то оно опрокинется.

330. Эластическія жидкости имѣютъ общее съ неэластическими то, что по допущеніи ихъ лишенными тяжести, давленіе сообщается равно во всѣ стороны. Различіе ихъ состоитъ въ слѣдующемъ: естьли сдѣлано будетъ на поверхность AB (*фиг.* 105) неупругой жидкости нѣкоторое давленіе P, дѣйствующее на подвижное основаніе AB, и потомъ вдругъ уничтожена будетъ эта сила; то жидкость не будетъ послѣ противудѣйствовать на подвижное основаніе AB. Напротивъ же въ упругихъ жидкостяхъ, по уничтоженіи силы P, приведшей основаніе AB въ какое нибудь положеніе ab, это основаніе ab будетъ назадъ извергаемо отъ b къ B съ тою же силою, съ какою оно было сгнѣтено отъ B до b.

Какъ бы то ни было, давленіе раздѣляется одинаково въ обѣихъ этихъ жидкостяхъ, то есть, оно дѣйствуетъ перпендикулярно на поверхности; равномѣрно въ упругихъ и тяжелыхъ жидкостяхъ, которыя сгнѣтаются по дѣйствію своей тяжести, усилія давленія на стѣны сосудовъ или на поверхность погруженныхъ въ эти жидкости тѣлъ, усилія, принимаемыя въ горизонтальномъ смыслѣ уничтожаются взаимно, а въ вертикальномъ онѣ приводятся въ одно, котораго направленіе проходитъ чрезъ центръ тяжести той величины, на которую жидкость дѣйствуетъ.

331. Чтожъ принадлежитъ до совершенной величины давленія на какую нибудь поверхность, по силѣ собственной тяжести эластической жидкости; то безъ сомнѣнія эта величина на горизонтальныя поверхности, при всѣхъ впрочемъ равныхъ частяхъ, будетъ пропорціональна поверхностямъ, на которыя давленіе производится. Но она не такъ измѣряется, какъ въ прочихъ жидкостяхъ, вѣсомъ призмы или цилиндра, имѣющаго основаніемъ ту поверхность, а высотою разстояніе той же поверхности отъ верхней поверхности жидкости.

Ибо естьли эластическая жидкость будетъ такова, что безъ тяжести своей она была бы способна занять пространство $AEFB$ (*фиг.* 106); то предположивъ ее тяжелою, должно непремѣнно заключить, что слои, ближайшіе къ основанію EF, по причинѣ собственнаго своего *вѣсу* и *вѣсу* верхнихъ слоевъ, будутъ болѣе сжаты сихъ послѣднихъ; и слѣд. въ двухъ слояхъ одинакой высоты, рядомъ стоящихъ, матерія ближняго ко дну EF будетъ плотнѣе или гуще втораго, и слѣд. будетъ вѣсомъ больше его. И такъ слои одинакой высоты тѣмъ менѣе будутъ обременять дно EF, чѣмъ далѣе отъ него будутъ находиться; и слѣд. цѣлое давленіе ихъ должно измѣряться не только величиною этого дна и числомъ слоевъ, находящихся отъ D до F, но и еще удѣльною тяжестію каждаго слоя, которая по мѣстамъ различна. И такъ представивъ чрезъ x разстояніе FQ какого нибудь слоя отъ основанія EF, чрезъ dx безконечно малую высоту его, и чрезъ D удѣльную тяжесть или густоту его, получимъ въ Ddx вѣсъ нити этого слоя, а въ $EF \times Ddx$ дѣйствіе его на EF; слѣд. дѣйствія всѣхъ слоевъ, или давленіе на EF изобразится чрезъ $EF\int Ddx$; то есть, для опредѣленія сего давленія надобно взять инте-

гралъ Ddx, и умножить его на EF. Но для этого надобно узнать величину D въ x; то есть, узнать по какимъ законамъ густоты измѣняются по мѣрѣ ихъ удаленія отъ основанія EF.

Естьли давленіе будетъ опредѣлено на горизонтальную поверхность, то не трудно послѣ опредѣлить его и на всякую другую, раздѣливъ эту послѣднюю на безконечно малыя части; ибо каждую изъ сихъ частей можно почитать за горизонтальную.

332. Изъ всѣхъ упругихъ жидкостей воздухъ наиболѣе заслуживаетъ наше вниманіе; и потому мы остановимся на немъ и разсмотримъ главныя его свойства, имѣющія отношеніе къ нашей цѣли.

333. *Воздухъ есть жидкость тяжелая.* Это дознано безчисленными опытами, изъ которыхъ важнѣйшіе суть слѣдующіе:

Естьли возьмешь стеклянную трубку (*Фиг.* 107) около 30 дюймовъ длиною, герметически запертую съ одного конца A, и наполнишь всю внутренность ея ртутью посредствомъ другаго отверстаго конца; потомъ перевернувъ ее погрузишь отверстымъ концомъ B въ сосудъ, наполненной также ртутью, то ртуть, находящаяся въ трубкѣ, будетъ опускаться до тѣхъ поръ, пока остальная колонна сдѣлается рав-

на около 27 дюймовъ съ половиною (*), ведя счетъ отъ ртутной поверхности въ сосудѣ.

И вотъ какимъ образомъ опытъ сей доказываетъ тяжесть воздуха. Колонна ртути *CB* производитъ въ точкѣ *B* на нижнюю ртуть давленіе; и слѣд. эта послѣдняя не иначе можетъ притти въ равновѣсіе съ первою, какъ противудѣйствуя ей съ равнымъ усиліемъ. А поелику ртуть, содержащаяся въ сосудѣ, при погруженіи трубки, дѣйствуетъ напротивъ сей колонны по пропорціи разстоянія поверхности своей до отверстія *B*, и потому не можетъ сама по себѣ сдѣлать равновѣсія. Слѣд. сила, производящая равновѣсіе, должна состоять не въ иномъ чемъ, какъ въ той жидкости, которая налягаетъ на всѣ точки ртутной поверхности въ сосудѣ; то есть, она будетъ состоять въ воздухѣ; и слѣд. воздухъ производитъ тяжестію своею равновѣсіе со ртутною колонною *BC*.

Вотъ и другой случай, которой подтверждаетъ тоже. Естьли допустимъ, что воздухъ поддерживаетъ колонну *BC*; то употребивъ въ предыдущемъ опытѣ другую жидкость легче ртути, должны получить высоту, на которой остановится эта жидкость, выше *BC*, такую, которая должна находиться (302) въ обратномъ содержаніи удѣльныхъ тяжестей двухъ этихъ жидкостей. Но извѣстно, что вода вѣсомъ въ четырнадцать разъ легче ртути; и потому воздухъ долженъ поддерживать колонну воды, употребленной вмѣсто ртути, до высоты равной $27\frac{1}{2}$ дюймамъ, взятымъ четырнадцать разъ, то есть, около 32 футовъ. А поелику на самомъ дѣлѣ знаемъ, что вода посредствомъ насоса подымается всегда до 32 футовъ постоянно, то безъ всякаго сумнѣнія принимаемъ воздухъ тяжелымъ, и слѣд. онъ тяжестію своею давитъ поверхность тѣлъ такъ, какъ бы давила оную колонна воды,

(*) Это количество можетъ перемѣняться по состоянію воздуха и по высотѣ мѣста; но мы здѣсь предполагаемъ, что опытъ сдѣланъ въ воздухѣ посредственнаго состоянія и на высотѣ равной положенію Парижа; притомъ допускаемъ трубочную ртуть, очищенною отъ воздуха.

имѣющая основанїемъ туже поверхность, а высотою около 32 футовъ.

Давленїе воздуха на поверхность воды, заставляетъ ее подниматься в насосахъ до извѣстной высоты; а чтобъ совершенно понять, какимъ образомъ это происходитъ, то должно посудить о другомъ свойствѣ воздуха, именно, о его упругости.

334 *Воздухъ есть жидкость удобо-сгнетаемая и эластическая; величины, въ которыя можно привести его, находятся чувствительно въ обратномъ содержанiи съ полагаемыми на него вѣсами.*

Это доказываетъ слѣдующiй опытъ.

Возьми стеклянную трубку *ABC* (*фиг.* 108) перегнутую на два колѣна, изъ которыхъ бы одно *AB* было длиною отъ тридцати до сорока дюймовъ, а другое *BC* имѣло бы повсюду одинакой дїаметръ, и было въ *C* заперто герметически; пусти въ трубку чрезъ отверстие *A* столько ртути, чтобъ нижнее пространство ея *B* покрылось; потомъ приложивъ эту трубку къ доскѣ, раздѣленной на степени, замѣть число раздѣленiй отъ *B* до *C*. Положимъ, что по замѣчанїю вышло 8 дюймовъ. Пусти еще ртути въ колѣно *AB*, пока разность между высотами ртути, заключающейся въ *AB*, и той, которая вступитъ въ колѣно *BC*, будетъ состоять изъ $27\frac{1}{2}$ дюймовъ; тогда воздухъ, занимавшiй предъ симъ всю часть колѣна *BC*, долженъ занять только одну половину его. Естьлижъ и еще впустишь ртути столько, что разность между высотами двухъ колѣнъ сдѣлается вдвое больше $27\frac{1}{2}$ дюймовъ, или около того числа; то воздухъ, оставшiйся въ *BC*, будетъ занимать уже одну треть этаго колѣна; онъ долженъ занять одну четверть его, когда разность будетъ втрое больше $27\frac{1}{2}$ дюймовъ; и такъ далѣе.

Этотъ опытъ показываетъ, что воздухъ сжимается по мѣрѣ обремененія его; и слѣд. онъ сжимается почти пропорціонально вѣсу этого обремененія.

Ибо во время, какъ ртуть находится въ одной только нижней части *B*, воздухъ, содержащійся въ *BC* будучи одного свойства съ содержащимся въ *AB*, обременяется всѣмъ вѣсомъ колонны воздуха, противоположной вертикально отверстію трубки; слѣд. онъ бываетъ обременяемъ вѣсомъ равнымъ ртутной колоннѣ высотою близу $27\frac{1}{2}$ дюймовъ. Но по прибавленіи новыхъ двухъ, трехъ и проч. подобныхъ первому давленію тяжестей, онъ по объявленному долженъ занимать пространство также вдвое, втрое и проч. меньше *BC*; слѣд. воздухъ сжимается въ содержаніи вѣсовъ, обременяющихъ его.

Что касается до упругости, то она напротивъ увеличивается или уменьшается по мѣрѣ сгнетенія воздуха.

Ибо по убавленіи ртути изъ колѣна *AB*, воздухъ занимаетъ пространство въ колѣнѣ *CB* по мѣрѣ, какъ уменьшено будетъ давленіе; и такъ воздухъ не только что удобо-сгнѣтаемъ, но и еще во всякомъ состояніи сжатія своего силится возстановить себя, и занять большее пространство; пространство, какое занимаетъ воздухъ при уменьшеніи бремени, сжимавшаго его, содержится къ тому, въ которое онъ былъ приведенъ, какъ вѣсъ, обременявшій его въ последнемъ случаѣ, къ остальному вѣсу.

335. И такъ воздухъ, называемой *натуральнымъ* или *свободнымъ*, находится самъ по себѣ сгнетенъ; ибо лишившись вдругъ тяжести своей, онъ долженъ бы распространиться во всѣ стороны съ такою силою,

что для удержанія части воздуха, заключенной на примѣръ въ пространствѣ *ABC* (*фиг.* 108), нужно было бы употребить при отверстіи *A* силу равную вѣсу такой ртутной колонны, которая бы имѣла основаніемъ тоже отверстіе, а высотою $27\frac{1}{2}$ дюймовъ.

336. Изъ показаннаго (330) различія между эластическими и неэластическими жидкостями явствуетъ, что воздухъ, заключенный со всѣхъ сторонъ въ сосудѣ, производитъ съ такимъ же усиліемъ оттолкновеніе снизу на верхъ, съ какимъ дѣйствуетъ наружной воздухъ съ верху на низъ; и это-то причиною, что тѣла не ощущаютъ и самаго большаго давленія, о которомъ мы упомянули (333).

337. Такая-трубка, какой мы сдѣлали (333) описаніе (*фиг.* 107), будучи врѣзана въ доску, раздѣленную на степени отъ линеи равенства, или отъ поверхности ртутехранилища, называется *Барометромъ*. Этотъ инструментъ служитъ къ измѣренію воздушнаго давленія на поверхность тѣлъ посредствомъ высоты ртути въ трубкѣ *AB*.

Не трудно примѣтить теперь, для чего сей инструментъ показываетъ одну и туже высоту, какъ въ открытомъ, такъ и ограженномъ со всѣхъ сторонъ мѣстѣ; ибо заключенный воздухъ производитъ по своей упругости такое же давленіе на поверхность ртуте-хранилища, какое бы онъ произвелъ своимъ вѣсомъ, будучи свободенъ.

338. Высота ртути въ одномъ и томъ же мѣстѣ не всегда бываетъ постоянна. Въ Парижѣ иногда поднимается она нѣсколько выше $27\frac{1}{2}$ дюймовъ, а иногда опускается нѣсколько ниже, смотря по величинѣ обремененія, произходящаго отъ вѣсу или упругости воздуха. Поелику же упругость воздуха можетъ увеличитья или уменьшиться безъ всякой перемѣны вѣса его, что и случается во время жару или холода; то не должно приписывать измѣненіе ртути въ барометрѣ единственно перемѣнѣ воздушнаго вѣса.

Какъ бы то ни было, но поелику по причинѣ этихъ перемѣнъ воздухъ дѣлаетъ равновѣсіе съ большею или меньшею колонною ртути, и слѣд. также можетъ сдѣлать его съ большею или меньшею колонною воды; то должно заключить, что самая большая высота, до которой можно под-

нять воду посредствомъ насоса, не состоитъ всегда изъ 32 футовъ; она также изменяется, глядя по высотѣ ртути въ барометрѣ.

339. Естьли перенесешь борометръ съ одного мѣста въ другое, выше или ниже перваго: то ртуть опустится въ первомъ случаѣ, а во второмъ подымется; потому что колонна воздуха, налягающая на поверхность ртуте-хранилища, будучи въ первомъ случаѣ короче, а во второмъ длиннѣе, должна имѣть глядя потому болѣе или менѣе вѣсу; и слѣд. она можетъ сдѣлать только равновѣсіе съ соразмѣрною себѣ колонною ртути. Это же самое и опытъ подтверждаетъ. Однако должно помнить, что эти измѣненія бываютъ только чувствительны на высотахъ, разнящихся между собою нѣсколькими тоазами. Можно на 12 тоазовъ разности въ высотѣ, положить съ довольною вѣрностію одну линею разности въ барометрѣ.

И такъ самыя большія высоты, на которыя можно поднять воду посредствомъ насоса, измѣняются по мѣстамъ и бываютъ пропорціональны высотамъ барометра.

340. Мы сказали, что воздухъ сгнетается почти въ содержаніи вѣсовъ. Хотя же опытомъ и доказали послѣ, что вѣсъ содержится въ точной и совершенной пропорціи съ сжимательностью, однакожъ

не должно это относить вообще ко всякому вѣсу, обременяющему воздухъ. Не льзя вѣрно утвердить, чтобъ можно было какую нибудь величину воздуха привести чрезъ безпрестанное обремененїе въ безконечно малое пространство, или чрезъ безпрестанное облегченїе въ безконечно великое. Такая чрезмѣрная сжимательность и расширяемость не находятся въ природѣ. Со всѣмъ тѣмъ на посредственныхъ высотахъ можно допустить, что воздухъ сгнетается по пропорцїи вѣсовъ, обременяющихъ его; и слѣд. заключая по сему, можно для всякаго мѣста опредѣлить довольно вѣрно высоту барометра.

На примѣръ, принявъ, какъ прежде (331) D за удѣльную тяжесть или густоту воздуха при какой нибудь извѣстной высотѣ, получимъ въ $\int Ddx$ выраженїе давленїя его въ томъ мѣстѣ; и такъ представивъ чрезъ h высоту барометра въ томъ же мѣстѣ, и чрезъ 1 густоту ртути, будемъ имѣть $\int Ddx = h$, или $\int -Ddx = h$, потому что при возрастающей величинѣ x, величина h уменьшается.

Съ другой стороны воздухъ тѣмъ гуще бываетъ чѣмъ больше обременяется, и слѣд. густота его или удѣльная тяжесть увеличивается по пропорцїи обременяющихъ его вѣсовъ; и потому представивъ чрезъ H высоту барометра отъ поверхности моря, а чрезъ p удѣльную тяжесть воздуха отъ той же поверхности (*niveau*), получимъ $H : h = p : D$; слѣд. $h = \frac{DH}{p}$, и слѣд. $\int -Ddx = \frac{HD}{p}$. Одифференцїаливъ это уравненїе и принявъ p и H постоянными, нахожу $-Ddx = \frac{HdD}{p}$; отсюда вывожу $\frac{dD}{D} = \frac{-pdx}{H}$; слѣд. (100) $lD = \frac{-px}{H} + lc$. Но при поверхности моря, то есть, когда $x = o$, должно быть $D = p$; слѣд. $lp = lC$, и слѣд. $C = p$. И такъ получимъ $lD = \frac{-px}{H} + lp$; отсюда выходитъ lD

$-lp = \frac{-px}{H}$, или $l\frac{D}{p} = \frac{-px}{H}$, или наконецъ $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$, e значитъ число, котораго логариѳмъ (90) равенъ 1. Слѣд. $D = pe^{\frac{-px}{H}}$. Возвращаясь къ уравненїю $\int - Ddx = h$, вставливаю вмѣсто D величину его, и получаю $h = \int - pe^{\frac{-px}{H}} dx$, такой интегралъ, которой (122) будетъ равенъ $He^{\frac{-px}{H}}$; и такъ выходитъ наконецъ $h = He^{\frac{-px}{H}}$, или $lh = lH - \frac{px}{H}$ уравненїе, по которому можно опредѣлить высоту h барометра на всякой высотѣ x мѣста, лежащаго выше морской поверхности, естьли будутъ извѣстны высота его H при поверхности морской, и удѣльная тяжесть p воздуха на томъ же горизонтѣ.

А чтобъ употребить это выраженїе еще легче въ выкладкѣ, то можно принять $\frac{px}{H}$ за логариѳмъ нѣкотораго числа A; и слѣд. по предположенїи $\frac{px}{H} = lA$, получимъ $lh - lH = l\frac{H}{A}$.

Но должно примѣтить, что ежели въ уравненїи $\frac{px}{H} = lA$, по вставкѣ величинъ p, x и H, опредѣлишь количество $\frac{px}{H}$, и слѣд. lA, то этотъ логариѳмъ будетъ не простой, а гиперболической; и такъ чтобъ сыскать число A посредствомъ обыкновенныхъ таблицъ, должно напередъ логариѳмъ сей

превратить въ обыкновенной, умноживъ его (88) на 0,43429448 и проч.

Что касается до уравненія $lh = l\frac{H}{A}$, то хотя оба логариѳмы его и гиперболическіе, однако можно почитать ихъ обыкновенными; потому что два числа, имѣющія равные логариѳмы въ одной системѣ, будутъ имѣть ихъ такими же и во всякой другой, общей имъ.

А дабы показать изъясненное теперь на самой практикѣ, то предложимъ найти высоту барометра на вершинѣ горы Пико де Тенерифа, и потомъ сравнимъ опредѣленную по выкладкѣ съ тою, какая въ самомъ дѣлѣ тамъ наблюдена.

Гора сія возвышается надъ поверьхностью моря 13158 Парижскими футами, или 157896 дюймами. Ртуть при горизонтѣ моря, по свидѣтельству дѣлавшихъ наблюденіе, остановилась на 27 дюймахъ и 10 линеяхъ, а на вершинѣ горы на 17 дюймахъ и 5 линеяхъ; то есть, по наблюденію найдено $h = 17^{д.}\ 5^{л.}$ Посмотримъ, что выдетъ изъ выкладки.

Удѣльная тяжесть воздуха состоитъ почти изъ 850 части обыкновенной воды; а удѣльная тяжесть воды изъ 14 части ртути. И потому . . . .

$$p = \frac{1}{850 \times 14} = \frac{1}{11900}$$

$$x = 157896^{д.}$$

$$H = 27^{д.}\tfrac{5}{6}$$

Слѣд. $\frac{px}{H} = \frac{157896}{11900 \times 27\frac{5}{6}} = 0{,}4767153$ гиперболическому логариѳму количества A. умноживъ его на 0,4342945, получимъ 0,2070346 обыкновеннымъ лога-

ѳариѳмомъ A. И такъ $l\frac{H}{A} = 1,2375306$, и слѣд. $lh = 1,2375306$, которому въ обыкновенныхъ таблицахъ отвѣчаетъ число 17,28; слѣд. $h = 17$д., $28 = 17$д. 3л. $\frac{1}{3}$. Но по наблюденію найдено 17д. 5л.; и такъ выкладка отъ наблюденія разнится на 1л. $\frac{2}{3}$.

Впрочемъ не должно почитать, чтобъ посредствомъ выкладки можно было въ точности опредѣлить высоту барометра на всякомъ мѣстѣ, а особливо на большихъ возвышеніяхъ. Ибо 1е. воздухъ, какъ мы то уже замѣтили, не стнетется на всякомъ разстояніи пропорціонально вѣсамъ. 2е. Тяжесть на большихъ разстояніяхъ уменьшается. 3е. Удѣльная тяжесть p воздуха бываетъ весьма перемѣнчива. 4е. Пары и другія постороннія частицы тѣлъ могутъ причинить большую перемѣну въ этомъ опредѣленіи.

341. Другой примѣръ, которымъ мы теперь намѣрены показать густоту воздуха на разныхъ высотахъ, имѣетъ болѣе отношенія къ нашей цѣли, потому что подаетъ понятіе о сопротивленіи воздуха при движеніи бросаемыхъ тѣлъ; но объ этомъ мы будемъ разсуждать больше въ слѣдующей части.

Мы нашли выше $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$ выраженіемъ сей густоты, принимая H высотою ртути въ барометрѣ при поверхности морской, или при точкѣ, откуда ведутъ шотъ x.

Пусть будетъ a та высота, на которую способна подняться атмосфера, когда вѣсъ ея и густота p будутъ одинаковы повсюду, какъ и при точкѣ, откуда начинается щотъ x; въ сходственность сего получимъ $1 \times H = pa$, 1 означаетъ удѣльную тяжесть ртути. Вставивъ вмѣсто H величину его pa, будемъ имѣть $\frac{D}{p} = e^{\frac{-x}{a}}$, и слѣд. $D = pe^{\frac{-x}{a}}$.

Что принадлежитъ до количества a, то оно зависитъ отъ содержанія удѣльной тяжести воздуха къ удѣльной тяжести воды въ томъ мѣстѣ, гдѣ опытъ производится; на примѣръ естьли удѣльная тяжесть воздуха къ водѣ будетъ содержаться $= 1 : 850$, какъ-то и случается въ посредственныхъ температурахъ и на небольшихъ возвышеніяхъ отъ поверхности моря, то воздухъ способенъ въ такомъ случаѣ посредственною своею тяжестію сдѣлать равновѣсіе съ колонною воды 32 футовъ; и слѣд. высота a будетъ $= 850 \times 32$ ф. $= 27200$ ф.

И такъ желая опредѣлить, по сдѣланнымъ теперь предположеніямъ, густоту атмосферы на высотѣ равной 1000 футамъ; мы получимъ $D = pe^{-\frac{1000}{27200}}$ $= pe^{\frac{-10}{272}}$, или $\frac{D}{p} = e^{\frac{-10}{272}}$, и слѣд. $l\frac{D}{p} = \frac{-10}{272}$. Теперь все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ узнать число, отвѣчающее гиперболическому логариѳму $\frac{-10}{272}$, или простому $\frac{-10}{272} \times 0{,}4342945$; но число, которое въ обыкновенныхъ таблицахъ отвѣчаетъ логариѳму $-0{,}0159593$, есть близу $0{,}964$; слѣд. $\frac{D}{p} = 0{,}964$, и слѣд. $D : p = 1 : 0{,}964 = 1000 : 964 = 250 : 241$; то есть, на высотѣ равной тысячѣ футамъ густота уменьшается $\frac{1}{25}$ частью. Такимъ же образомъ найдемъ, что она на 1000 туазахъ должна уменьшиться $\frac{20}{100}$, то есть, почти $\frac{1}{5}$ частью.

342. Выразумѣвъ хорошо сдѣланныя изъясненія на вѣсъ и упругость воздуха, равно какъ и вообще на давленіе жидкостей, не трудно понять послѣ, какимъ образомъ вода подымается въ насосахъ.

Насосъ состоитъ изъ трехъ главныхъ частей, то есть, изъ трубъ, клапановъ и поршня; и бываетъ двоякаго роду, *духовой* и *нагнѣтальной*.

Поршень есть тѣло *ABCD* круглаго основанія (*фиг*. 109, 110 и 111); онъ опускается во внутреннюю пустоту насосной трубы, и пробѣгаетъ по ней, прилегая всюду плотно къ ея стѣнамъ. Клапанъ *E* служитъ для пропуску или удержанія воды. Насосная труба есть та часть, которую пробѣгаетъ поршень; она вкладывается въ другую *FGHK*, погруженную однимъ концомъ въ воду, коей *RS* представляетъ горизонтъ.

Естьли сила *P* (*фиг*. 109) начнетъ поднимать поршень посредствомъ рукоятки, то воздухъ, заключенный въ пространствѣ *DVKHGFC*, станетъ силиться по своей упругости занять все то пространство, которое отъ поршня сдѣлается свободнымъ; онъ подыметъ клапанъ *E* и взойдетъ въ насосную трубу. Послѣ чего упругость его должна уменьшиться по мѣрѣ распространенія его; и слѣд. онъ будетъ дѣйствовать на поверхность *GH* воды съ меньшею силою, чѣмъ натуральной воздухъ на окружающія части насосъ *RG*, *HS*. Излишнее давленіе наружнаго воздуха побу-

дитъ воду вступить въ трубу *GK*, гдѣ она не прежде остановится у нѣкоторой высоты *HN*, пока вѣсъ водной колонны вмѣстѣ съ упругостію заключеннаго воздуха не сдѣлается равенъ вѣсу наружнаго; тогда клапанъ *E* закроется самъ по себѣ. Естьли поршень опустится снова, то воздухъ, содержащійся между имъ и основаніемъ *TV* насосной трубы увеличится опять въ своей упругости по мѣрѣ углубленія поршня на низъ; сила его будетъ дѣйствовать на основаніе поршня, и естьли упругость заключеннаго воздуха превзойдетъ силу наружнаго, то внутренной будетъ силиться выпти вонъ, и пройдетъ сквозь отверстіе поршня, которое покрыто клапаномъ *L*; этотъ клапанъ открывается и закрывается на подобіе перваго *E*. Какъ скоро воздухъ выдетъ, то клапанъ *L* закроется. По возобновленіи дѣйствія, вода подымется въ *FGHK* на большую высоту, такъ что послѣ нѣсколькихъ подъемовъ поршня она взойдетъ въ насосную трубу, а оттуда при опущеніи поршня пройдетъ сквозь отверстіе его, поднявъ клапанъ; когдажъ клапанъ закроется, то вода остановится на поршнѣ въ насосной трубѣ, и будетъ подниматься вверхъ вмѣстѣ съ поршнемъ. Таково дѣйствіе *духоваго насоса*.

Что принадлежитъ до *нагнѣтательнаго* насоса, то вотъ какимъ образомъ онъ дѣйствуетъ. Какъ скоро поршень *PCD* (*фиг.* 110), установленной ниже поверхности воды *RS*, опустится, то произодетъ между основаніемъ его и клапаномъ *E* пустота. Вода, дѣйствуя въ такомъ случаѣ вѣсомъ своимъ обще съ наружнымъ воздухомъ на клапанъ *L*, проходитъ въ насосную трубу, и сдѣлавъ равновѣсіе, закрываетъ его. Поршень возвращаясь назадъ поднимаетъ вмѣстѣ съ собою взошедшую сквозь отверстіе его воду; эта вода будучи сгнетена, открываетъ клапанъ *E* и входитъ въ часть *TVYX*. Когда поршень дойдетъ до своего предѣла, тогда клапанъ *E* закрывшись, удержитъ надъ собою воду. По возобновленіи дѣйствія, вода при каждомъ подъемѣ поршня будетъ подниматься въ *TVYX*. Иногда поршень располагается выше водной поверхности; но дѣйствіе въ обоихъ случаяхъ бываетъ одинаково.

Нагнѣтально-духовой насосъ называется такъ потому, что онъ соединяетъ въ себѣ дѣйствія обоихъ предыдущихъ. Когда при поднятіи поршня *ABCD* (*фиг.* 111) вода прошедъ по трубѣ *FGHK*, займетъ пространство *CDTVO*, какъ показано было въ духовомъ насосѣ; тогда поршень опу=

скаясь на низъ, начинаетъ гнести воду; вода не въ состояніи будучи пройти чрезъ клапанъ *E*, подымаетъ клапанъ *L* и вступаетъ въ *MOmn.* Строеніе и расположеніе насосовъ бываютъ различны, но дѣйствія ихъ изъясняются одинакимъ образомъ.

343. Посмотримъ теперь на главныя свойства сихъ машинъ.

Помощію нагнѣтательнаго насоса можно поднимать воду на всякую высоту, лишь бы на то употреблена была достаточная сила. Но поелику при исчисленіи этой силы надобно имѣть великое вниманіе на измѣренія поршня и трубы, также на высоту и скорость поднятія; то мы оставляя самое исчисленіе, покажемъ только нѣкоторыя, служащія къ тому средства.

Неоспоримо, что сила нужная для поднятія воды на извѣстную высоту, должна по крайней мѣрѣ равняться той, съ какою вода достигнувъ искомой высоты будетъ давить поршень. И сіе-то давленіе мы намѣрены теперь исчислить.

Вообще употребляемая сила должна быть по крайней мѣрѣ способна удержать такую колонну воды, которая имѣетъ равное основаніе съ поршнемъ, а высотою разстояніе

ея отъ поверхности воды *RS* до верхняго слоя *XY* (*фиг.* 110).

Доказательствомъ сему можетъ служить слѣдующее. Когда основаніе *DC* поршня бываетъ ниже водной поверхности *RS*, тогда сила нимало не участвуетъ для поддержанія давленія воды, заключающейся между *RS* и *DC*; потому что это давленіе находится въ равновѣсіи съ окружною водою. Слѣд. сила удерживаетъ только то гнетеніе, которое жидкость, заключенная между *RS* и *XY*, производитъ на поверхность *DC*. Но это гнетеніе равно давленію одной нити, имѣющей высотою разстояніе отъ *RS* до *XY*, взятому столько разъ, сколько находится точекъ въ *DC*; слѣд. оно должно быть въ самомъ дѣлѣ равно вѣсу такой колонны воды, которая имѣетъ основаніемъ *DC*, а высотою разстояніе *XY* до поверхности водной.

Когдажъ поршень бываетъ выше поверхности водной, которую положимъ теперь будетъ представлять *R'S'*; въ такомъ случаѣ вода, содержащаяся между *DC* и *R'S'*, поддерживается однимъ гнетеніемъ наружнаго воздуха, дѣйствующаго на поверхность окружающей воды; а какъ это давленіе неспособно сдѣлать равновѣсія съ гнетеніемъ

воздуха, дѣйствующаго на поверхность XY, то поверхность DC поршня будетъ обременяема вѣсомъ равнымъ колоннѣ воды, имѣющей DC основаніемъ, а высотою разстояніе отъ DC до $R'S'$. Но это давленіе вмѣстѣ съ давленіемъ воды, содержащейся между DC и XY, производитъ, какъ и прежде, вѣсъ такой колонны воды, которая имѣетъ основаніемъ DC, а высотою разстояніе XY отъ поверхности водной $R'S'$.

344. Что касается до духоваго насоса, то чтобъ судить о дѣйствіи его, должно смотрѣть не только на употребляемую силу, но и еще на то, можетъ ли подняться вода до поршня и выше его; ибо въ нѣкоторыхъ обстоятельствахъ вода останавливается на извѣстномъ предѣлѣ, и далѣе итти не можетъ, сколько бы насосъ ни былъ качаемъ.

А чтобъ понять это лучше, то допустимъ воду, достигшею точки I (*фиг.* 109), что поршень находится въ самомъ низкомъ положеніи, и что насосъ имѣетъ повсюду одинакую толщину. Отсюда явствуетъ, что воздухъ, заключающійся въ пространствѣ $CDIZ$ долженъ имѣть одинакую силу и одинакую упругость съ наружнымъ (исключая вѣсу клапана L и сопротивленія,

происходящаго отъ тренія его). Ибо естьли бы онъ имѣлъ больше того упругости, то бы долженъ поднять клапанъ *L* и выити чрезъ него. Положимъ теперь *DO* за то пространство, которое поршень пробѣгаетъ при каждомъ подъемѣ. По пришествіи основанія *CD* поршня въ положеніе *QO*, воздухъ, занимавшій пространство *CDIZ*, будетъ силиться распространиться по пространству *QOIZ*; и естьли вода не подымется выше, то онъ дѣйствительно по оному распространится. Тогда упругость его сдѣлается меньше, и будетъ находиться въ содержаніи *CDIZ* къ *QOIZ*, или *DI* къ *OI*. Естьли эта сила упругости вмѣстѣ съ вѣсомъ водной колонны, имѣющей высотою разстояніе *ZI* до *RS*, будетъ равна 32 футамъ поднятой воды, то есть, тому усилію, которое наружной воздухъ можетъ производить на поверхность воды въ *RS*, то безъ сумнѣнія произойдетъ равновѣсіе, и вода не можетъ подниматься далѣе. Когдажъ сей вѣсъ будетъ больше 32 футовъ, или меньше, то вода въ первомъ случаѣ должна упасть, прежде нежели клапанъ *E* закроется, а во второмъ она будетъ продолжать подниматься.

Посмотримъ на средства опредѣлять сей вѣсъ.

Представимъ чрезъ h высоту точки O отъ водяной поверхности RS; чрезъ i подъемъ поршня, или пространство DO, пробѣгаемое имъ; чрезъ x разстояніе OI. Послѣ чего будемъ имѣть $DI = x - i$, а высота точки I изобразится чрезъ $h - x$.

Поелику воздухъ, заключенный въ $CDIZ$ имѣетъ по положенію одинакую упругость съ наружнымъ, то сила его будетъ измѣряться колонною воды, высотою 32 футовъ; а какъ сила сего воздуха, распространившагося по пространству $QOIZ$, должна быть меньше и въ содержаніи DI къ OI, то она опредѣлится четвертымъ членомъ слѣдующей пропорціи $x : x - i = 32 : \frac{32 \times (x - i)}{x}$. Но сила, съ которою вода, заключающаяся между ZI и RS, сопротивляется давленію наружнаго воздуха, имѣетъ мѣрою высоту $h - x$; и потому сила упругости воздуха, распространившагося по пространству $QOIZ$, вмѣстѣ съ вѣсомъ воды отъ IZ до RS, будетъ равняться вѣсу, изображенному чрезъ $\frac{32 \times (x - i)}{x} + h - x$. Но чтобъ вода могла еще подниматься, то должно этому вѣсу быть меньше 32-футовой колонны воды; слѣд. представивъ чрезъ y то, чѣмъ этотъ вѣсъ будетъ меньше, получимъ такое уравненіе $\frac{32 \times (x - i)}{x}$ $+ h - x = 32 - y$; отсюда выходитъ $- 32i + hx - xx$ $= - xy$, и слѣд. $x = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} y \pm \sqrt{\left[\left(\frac{h + y}{2}\right)^2 - 32i \right]}$.

Отсюда явствуетъ, что вода должна остановиться, когда y сдѣлается равнымъ нулю. А поелику въ такомъ случаѣ уравненіе принимаетъ слѣдующій видъ $x = \frac{1}{2} h \pm \sqrt{(\frac{1}{4} hh - 32i)}$, то обѣ величины x будутъ настоящими тогда только, когда $\frac{1}{4} hh$ будетъ больше $32i$; слѣд. можно утвердительно сказать, что *какъ скоро квадратъ изъ половины самой большой высоты основанія поршня надъ водною поверхностію будетъ больше высоты подъема поршня, взятой 32 раза; то въ насосѣ будутъ находиться всегда двѣ точки, при которыхъ вода остановится. И*

слѣд. тотъ насосъ, въ которомъ самое низкое положенiе поршня будетъ между этими точками, почитается негоднымъ.

Естьли же $32i$ будетъ больше $\frac{1}{4}hh$, то обѣ величины x, по предположенiи $y = 0$, сдѣлаются умственными; а это показываетъ, что y никогда не можетъ быть равнымъ нулю, естьли конструкцiя насоса будетъ сдѣлана по этому условiю; слѣд. давленiе наружнаго воздуха будетъ всегда сильнѣе, чѣмъ внутренняго, и вода никогда не остановится. И такъ совершенство духоваго насоса зависитъ отъ расположенiя поршня; дѣйствiе его будетъ не сомнѣнно, когда квадратъ самой большой высоты поршня надъ водною поверхностью будетъ больше подъемной высоты его, взятой 32 раза.

Естьли изъ уравненiя $-32i + hx - xx = -xy$ найденнаго выше, выведемъ величину y, то получимъ $y = \frac{xx - hx + 32i}{x}$.

Положимъ теперь, что AB (фиг. 112 и 113) представляетъ самую большую высоту поршня надъ поверхностью воды, а AD подъемъ его. Естьли вставимъ въ выведенномъ уравненiи вмѣсто x попеременно величины разныхъ частей AP линеи AB, и потомъ опредѣливъ по онымъ величины y, перенесемъ ихъ на сходственные перпендикуляры PM; то получимъ кривую линею MMC, которая по мѣрѣ какъ (фиг. 112) $\frac{1}{4}hh$ будетъ больше $32i$, пересѣчетъ AB въ двухъ точкахъ I и I', и слѣд. ординаты PM будутъ находиться по обѣ стороны AB; тѣ, которыя лежатъ по правую сторону, означатъ положительныя величины y; а тѣ, которыя по лѣвую сторону, означатъ отрицательныя величины.

Естьли $\frac{1}{4}hh$ будетъ больше $32i$, то давленiе наружнаго воздуха останется сильнѣе до тѣхъ поръ, пока вода не достигнетъ до высоты BI'. Но при этой точкѣ (исключивъ прiобрѣтенное ею движенiе) она остановится, потому что y сдѣлается тутъ равнымъ нулю. Когда же вода силою прiобрѣтеннаго движенiя перейдя высоту BI', и достигнетъ до какой

нибудь точки, лежащей между I и I'; но она не можетъ тамъ остановиться, и должна упасть (предположивъ, что клапанъ не сдѣлаетъ ей никакого сопротивленія), потому что величина y сдѣлавшись въ такомъ случаѣ отрицательною, покажетъ, что давленіе наружнаго воздуха должно быть слабѣе, чѣмъ совокупное усиліе воды со внутреннимъ воздухомъ. Естьли вода подымется до высоты I, то она при этой точкѣ остановится по той же причинѣ. Когда же она перейдетъ за точку I, тогда болѣе не упадетъ, потому что ордонаты PM, заключающіяся между A и I, будучи положительными, покажутъ, что давленіе наружнаго воздуха останется всегда сильнѣе отъ точки I до самой точки A.

Естьли же напротивъ $\frac{1}{4}hh$ будетъ меньше $32i$ (*фиг.* 113), то кривая линея не можетъ уже пересѣчь оси AB; всѣ ординаты PM будутъ въ такомъ случаѣ положительными. Давленіе наружнаго воздуха будетъ вездѣ сильнѣе, и слѣд. нигдѣ не можно опасаться въ водѣ остановки. А это утверждаетъ объявленное нами выше.

345. Естьли духовой насосъ будетъ поставленъ на высотѣ или глубинѣ такой, при которой воздухъ чувствительно будетъ разниться вѣсомъ своимъ съ колонною воды 32 футовъ; то должно во всемъ объявленномъ нами полагать больше или меньше 32 футовъ. Это большинство, или меньшинство опредѣляется барометромъ, и послѣ прибавляется столько разъ 14 линей къ 32 футамъ, или убавляется у нихъ столько разъ 14 линей, на сколько линей ртуть подымется выше $27\frac{1}{2}$ дюймовъ, или опустится ниже этого числа.

ВЪ предыдущей выкладкѣ мы принимали насосЪ вездѣ одинакую толщину имѣющимЪ; когда же онЪ будетЪ сдѣланЪ иначе, какЪ-то представляетЪ его *фиг.* 109; то и тутЪ предыдущее рѣшенïе не будетЪ труднѣе.

Для опредѣленïя силы внутренняго воздуха вЪ положенïи воды, когда она достигнетЪ только до высоты MN и не будетЪ еще занимать пространства XV, должно сдѣлать слѣдующую пропорцïю, какЪ пространство $QOVNMTQ : CDVNMTC = 32$ ф. кЪ четвертому члену, которой вмѣстѣ сЪ вѣсомЪ водной колонны, имѣющей высотою NH должно приравнять кЪ $32 - y$, какЪ и прежде. При томЪ же когда нижняя труба FG будетЪ имѣть меньше дïаметрЪ, чѣмЪ верхняя, то насосЪ, есть и означенныя выше условïя могутЪ состояться, будетЪ имѣть всегда несомнѣнное дѣйствïе; ибо воздухЪ удобнѣе распространяется вЪ насосѣ разной толщины, чѣмЪ вЪ такомЪ, у котораго она вездѣ одинакова.

346. Что касается до силы, какую нужно вЪ духовомЪ насосѣ употребить для поддержанïя воды на опредѣленной высотѣ XT (*фиг.* 109); то эта сила измѣряется, какЪ и вЪ нагнѣтательномЪ, вѣсомЪ такой водной колонны, которая имѣетЪ основанïемЪ основанïе DC поршня, а высотою разстоянïе XT отЪ поверхности воды RS (надобно замѣтить, что мы не принимаемЪ здѣсь вЪ уваженïе ни вѣсу ни тренïя поршня). Этому доказательствомЪ служитЪ тоже разсужденïе, какое мы сдѣлали вЪ нагнѣтальномЪ насосѣ, вЪ которомЪ поршенЪ установленЪ выше водной поверхности RS' (*фиг.* 110).

347. Тяжесть и упругость воздуха изъясняются многими другими опытами; но мы предложимъ здѣсь о нѣкоторыхъ только.

Естьли въ сосудъ, наполненный водою или другою какою нибудь жидкостью, погрузишь короткимъ концомъ перегнутую трубку *DEF* (*фиг.* 114), и потомъ высосешь изъ нее воздухъ, или лишишь ее онаго какимъ нибудь другимъ образомъ; то вода подымется въ этой трубкѣ, и будетъ вытекать концомъ *F* до тѣхъ поръ, пока не убудетъ ее въ сосудѣ по отверстїе *D*.

Причиною этому служитъ слѣдующее: по извлеченїи воздуха, находящагося въ трубкѣ *DEF*, сила наружнаго начинаетъ давить поверхность *AB* жидкости, содержащейся въ сосудѣ, и понуждаетъ ее подняться и течь колѣномъ *EF*. Хотя же текущая жидкость ощущаетъ при концѣ *F* такое же почти давленїе, какое и самая поверхность воды въ сосудѣ; но какъ слой воды при *F* ощущаетъ въ то же время еще давленїе всей водной колонны *IF* въ противную сторону, то эта колонна упадая оставляетъ въ *I* пустоту, которая неминуемо наполняется безпрестаннымъ дѣйствїемъ наружнаго воздуха, гнетущаго поверхность воды въ сосудѣ.

Это же разсужденїе показываетъ, что воздухъ дѣйствуетъ во время теченїя воды силою, которая пропорцїональна разности *IF* горизонтальной линеи между *F* и поверхностью воды въ сосудѣ; такимъ образомъ теченїе воды тѣмъ сильнѣе и скорѣе бываетъ, чѣмъ оба колѣна трубки величиною своею больше разнятся, и слѣд. естьли оба колѣна будутъ равны, то вода не получитъ никакого теченїя. Хотя говоря просто, утверждаемъ, что колѣно *EF* должно быть длиннѣе колѣна *ED*, однако въ самомъ дѣлѣ разумѣемъ тутъ о вертикальной высотѣ точки *E* надъ *F*, которая должна быть больше высоты *E* надъ *D*. Одна длина не можетъ ничего сдѣлать. Иногда можетъ быть и *DE* длиннѣе *EF*; но естьли колѣно *DE* будетъ изогнуто разными оборотами такъ, что

положенїе точки D сдѣлается выше F, то вода не перестанетъ течь, пока она не сбудетъ до D, лишь бы высота E надъ D не превосходила 32 футовъ.

348. Когда, приложивъ губы плотно къ горлу бутылки, будешь всасывать въ себя содержащїйся въ ней напитокъ; то губы въ такомъ случаѣ крѣпко прильнутъ къ краямъ горла, и тѣмъ труднѣе ихъ оторвать, чѣмъ сильнѣе будешь всасывать напитокъ.

Ибо всасывая въ себя часть содержащагося въ бутылкѣ воздуха, уменьшаемъ тѣмъ упругость остальнаго, пропорцїонально отнятому количеству; послѣ чего внутреннїй воздухъ не можетъ уже дѣйствовать съ такою же силою изнутри, съ какою наружной дѣйствуетъ снаружи внутрь. Разность между упругостями наружнаго и внутренняго воздуха можетъ простираться до того, что бутылка лопнетъ, а особливо когда будетъ она плоская.

349. Такимъ же образомъ изъясняется, для чего не такъ легко можно дѣйствовать мѣхами тогда, когда отверстїе ихъ бываетъ заткнуто. Ибо при раздвижкѣ мѣховыхъ крыльевъ внутреннїй воздухъ распространяется въ большомъ количествѣ, и по мѣрѣ того уменьшается въ упругости; слѣд. наружной воздухъ давитъ въ такомъ случаѣ больше снаружи внутрь, чѣмъ внутреннїй наружу.





ТАБЛИЦА

удѣльныхъ тяжестей употребительнѣйшихъ веществъ.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНЕ.

Числа, которыя противополагаются каждаго рода веществу въ слѣдующей таблицѣ, означаютъ содержаніе вѣса какой-нибудь удѣльной величины того же вещества къ подобной величинѣ дождевой воды. Кубической футъ дождевой воды вѣситъ 70 французскихъ фунтовъ; и слѣд. для опредѣленія по этой таблицѣ вѣсу въ фунтахъ кубическаго фута другаго какого-нибудь вещества, должно умножить на 70 число, отвѣчающее въ сей таблицѣ тому веществу.

На примѣръ число, отвѣчающее ртути, состоитъ изъ 13,593 и означаетъ, что ртуть вѣситъ въ 13 $\frac{593}{1000}$ разъ больше воды. Умноживъ 13.593 на 70, получимъ 951,51, или почти 951½ фунтовъ за вѣсъ одного кубическаго фута ртути.

УДѢЛЬНЫЯ ТЯЖЕСТИ
нѣкоторыхъ твердыхъ Тѣлъ.

Аспидъ (камень)	3,500.
Бораксъ	1,720.
Воскъ (желтой)	0,995.
Глетъ (золотой)	6,000.
Глетъ (серебреной)	6,044.
Глина	1,929.
Дерево Бразильское	1,030.
——— буковое	1,030.
——— вязовое	0,600.
——— гвайякъ	1,337.
——— дубовое (сырое) . . .	1,143.
——— дубовое (сухое) . . .	0,857.
——— ивовое	0,543
——— кедровое	0,613.
——— кленовое	0,755.
——— машерое	0,854.
——— орѣховое	0,600.
——— ольховое	0,530.
——— сосновое	0,550.
——— черное	1,177.
——— ясеневое	0,845.
Желѣзо	8,286.
Золото (пробное)	19,640.
Камедь (Аравійская) . . .	1,375.

Квасцы	1,714.
Киноварь (натуральная) . .	7,300.
Киноварь (искуственная) . .	8,200.
Кирпичь	1,857.
Кремень (темный) . . .	2,542.
Кремень (прозрачный) . .	2,641.
Кровавикъ (камень) . .	4,360.
Кость (слоновая) . . .	1,825.
Купоросъ	1,880.
Марганецъ	3,530.
Мраморъ	2,700.
Мѣдь (зеленая) . . .	7,829.
Мѣдь (красная) . . .	9,257.
Олово (чистое) . . .	7,320.
Олово (Аглицкое) . . .	7,471.
Песокъ (рѣчной) . . .	1,900.
Пластырь	1,228.
Порохъ	0,914.
Резина	1,150.
Рогъ (воловїй) . . .	1,840.
Рогъ (оленїй) . . .	1,875.
Ртуть	13,593.
Свинецъ.	11,828.
Серебро (пробное) . . .	11,091.
Селитра	1,900.
Сталь (гибкая или некаленая) .	7,738.
Сталь (каленая) . . .	7,704.
Соль (горная) . . .	2,143.
Стекло (бѣлое) . . .	3,150.
Сѣра (обыкновенная) . .	1,800.
Сѣра (горючая) . . .	2,000.

Сурьма (Нѣмецая)	4,000.
Сурьма (Венгерская)	4,700.
Уголье (земляное)	1,240.
Цинковой камень	5,000.
Чугунъ	7,114.
Ярь (Веницейская)	1,714.

УДѢЛЬНЫЯ ТЯЖЕСТИ

нѣкоторыхъ Жидкостей.

Вода дождевая	1,000.
—— рѣчная	1,009.
—— морская	1,030.
—— перегнатая	0,993.
Водка царская	1,234.
—— крѣпкая	1,300.
Вино Бургонское	0,953.
Винной Спиртъ.	0,866.
Воздухъ	0,001⅕.
Кислота селитреная	1,315.
Она же (усиленная)	1,610.
—— морская	1,130.
—— изъ виннаго камня	1,073.
—— купоросная или сѣрная	1,203.
Спиртъ винной	0,866.
—— терпентинной	0,874.

Масло деревянное . . .	0,913.
——— льняное. . . .	0,932.
——— терпентинное . .	0,792.
УксусЪ винной . . .	1,011.
ОнЪ же перегнатой . .	1,030.

Конецъ.



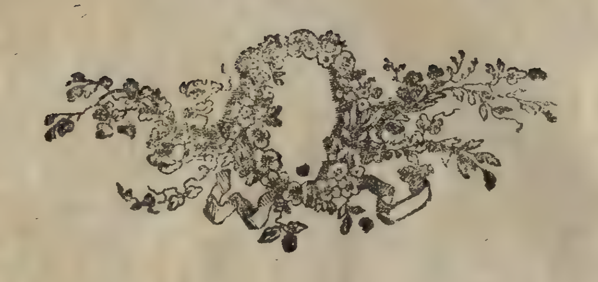


ТАБЛИЦА МАТЕРІИ.

Правила Исчисленія, служащія введеніемъ въ Физико-Математическія науки.

Щ 5

Примѣненіе предидущихъ правилъ.

Правила Интегральнаго исчисленія.

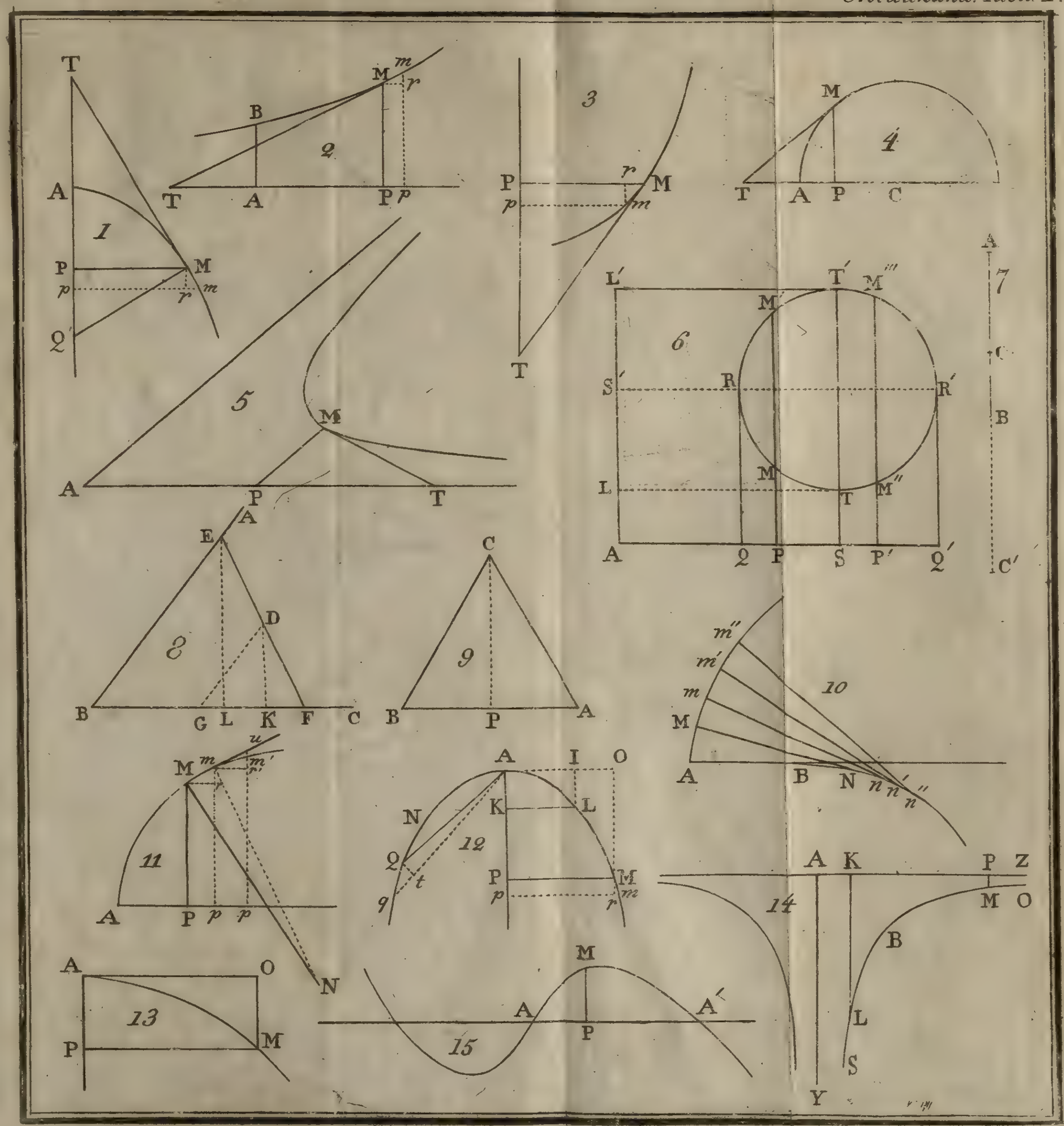
Примѣненіе предыдущихъ правилъ.

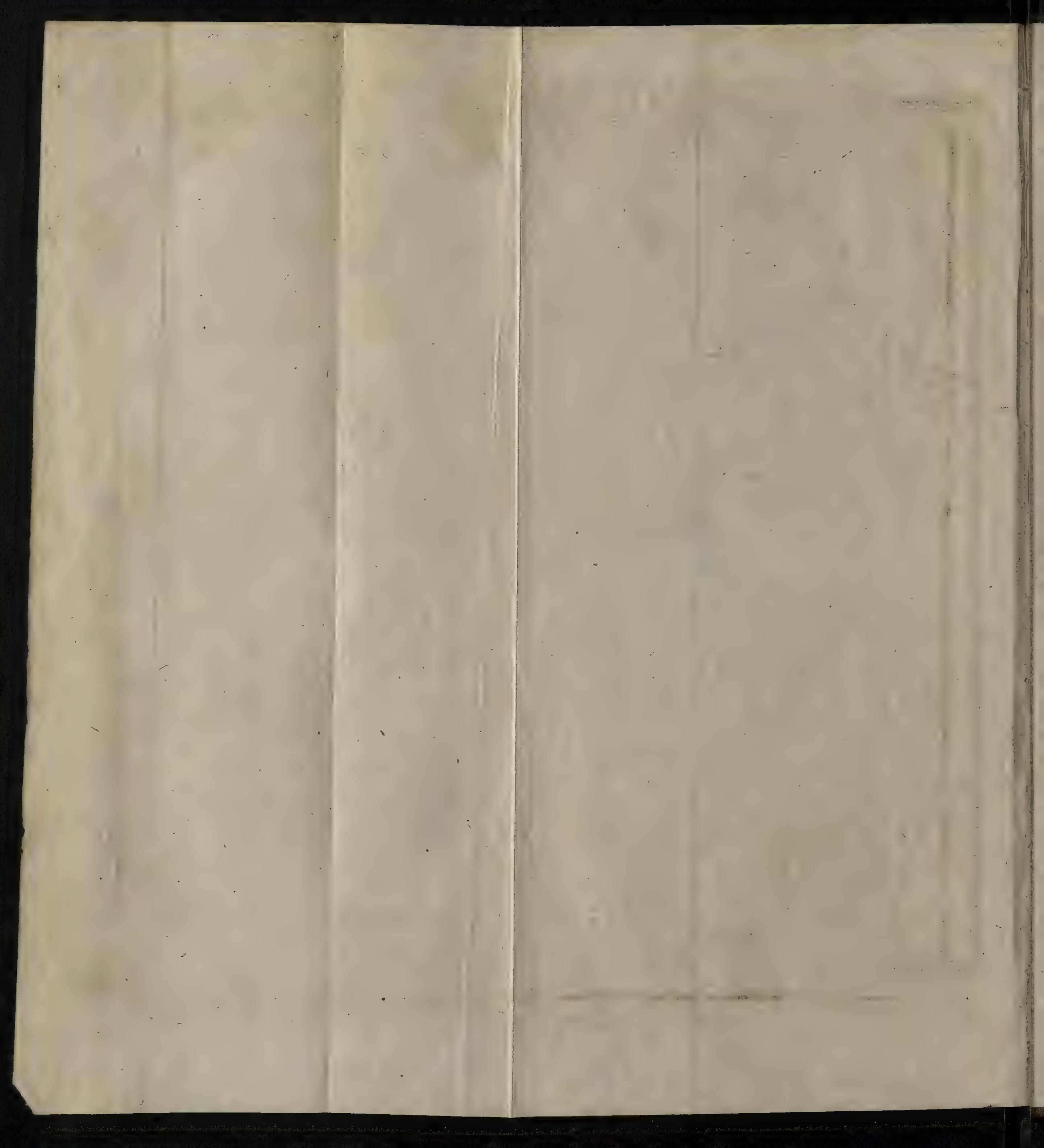
ОБЩІЯ ПРАВИЛА *МЕХАНИКИ.*

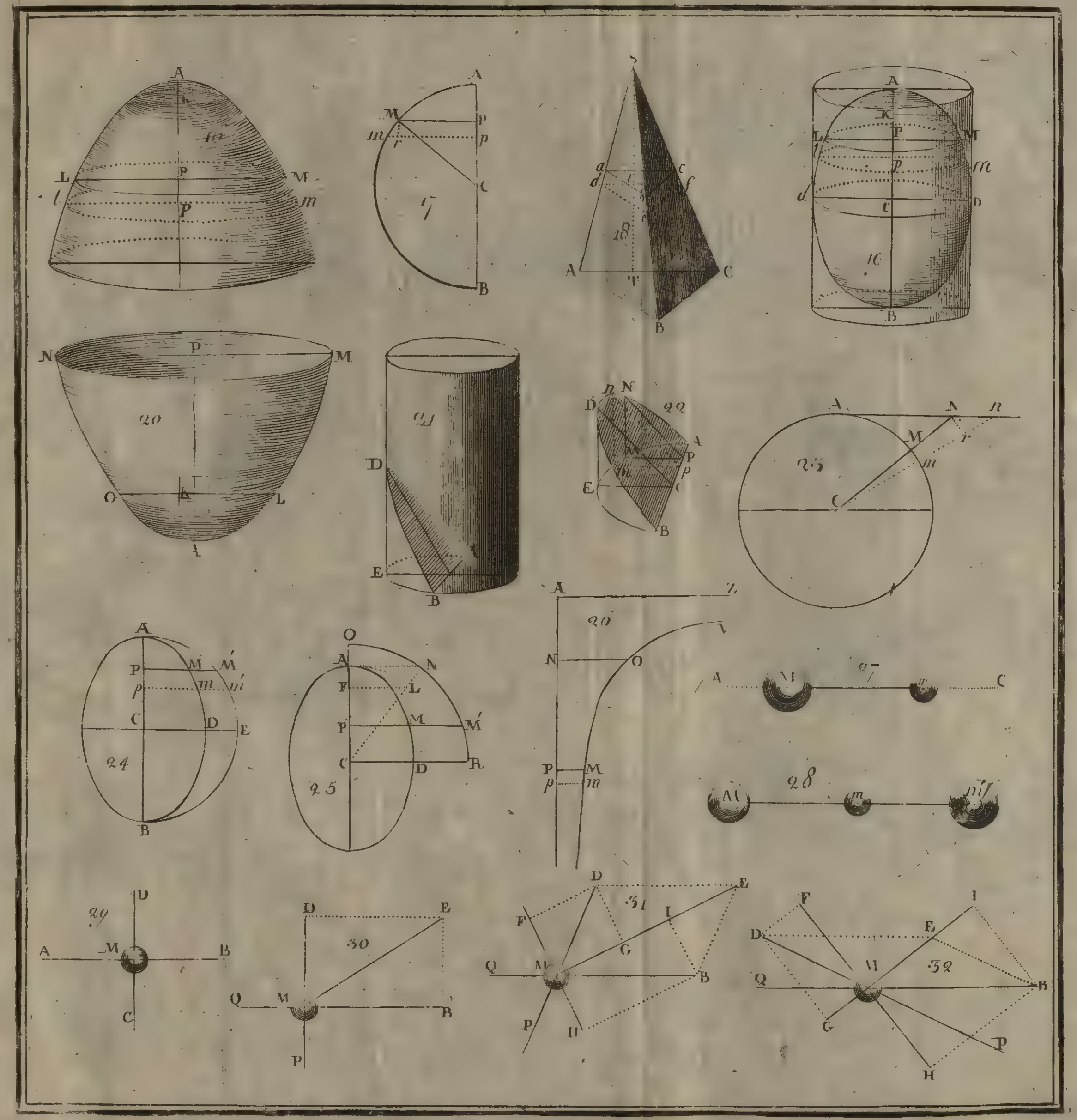
О РАВНОВѢСІИ *Жидкостей и о Тѣлахъ, погружаемыхъ туда.*

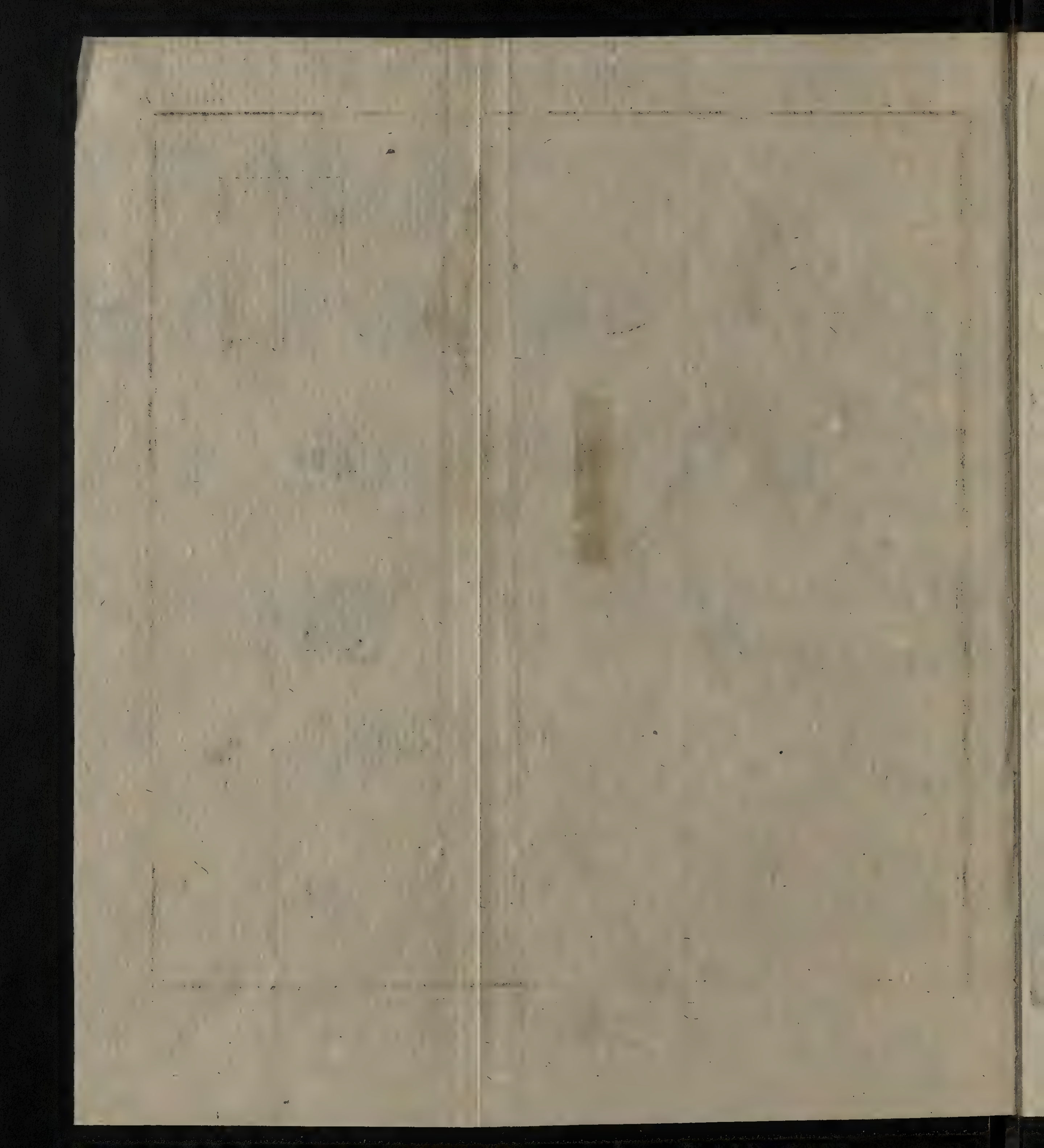
КонецЪ Таблицы матерїи.

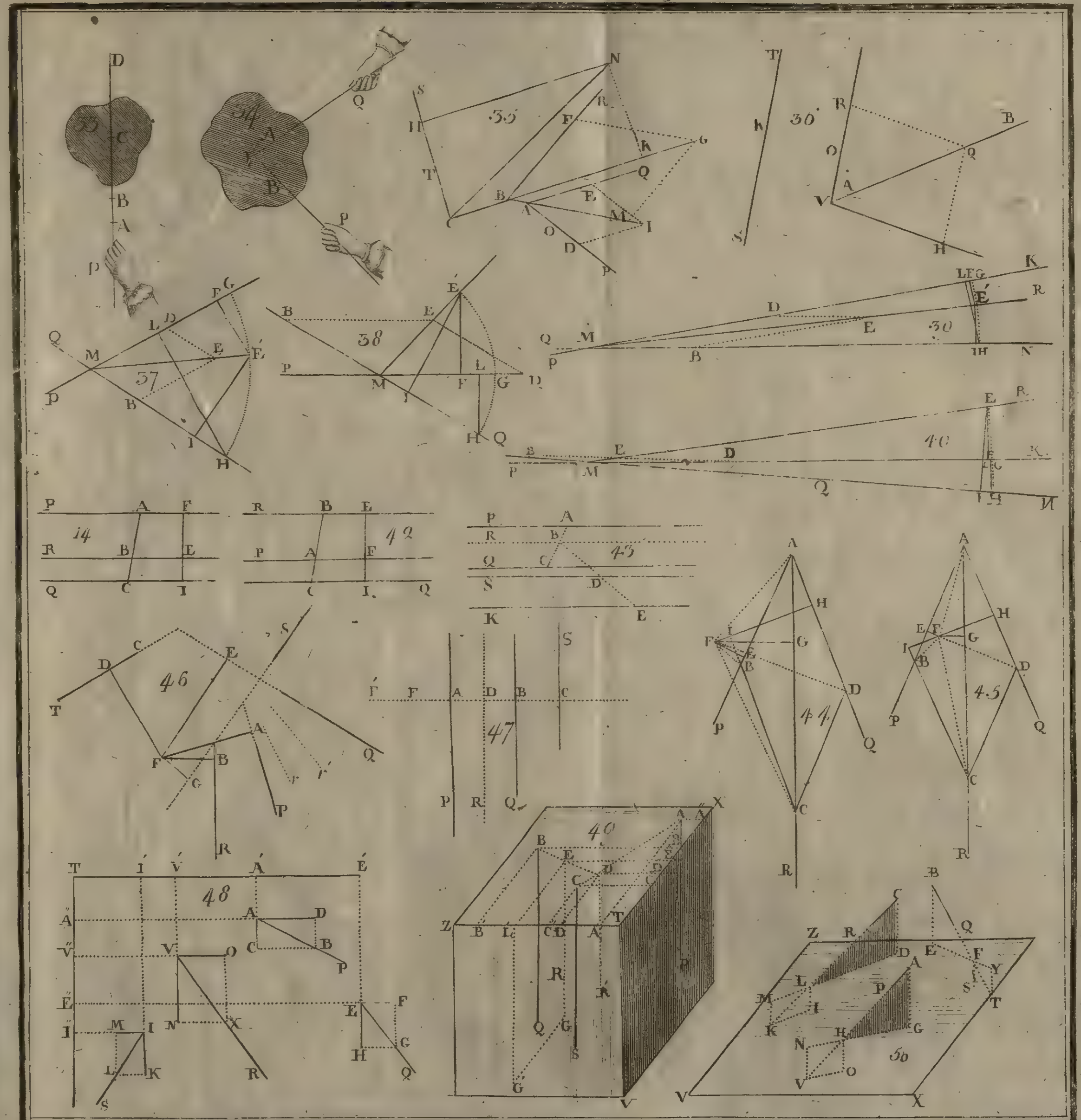




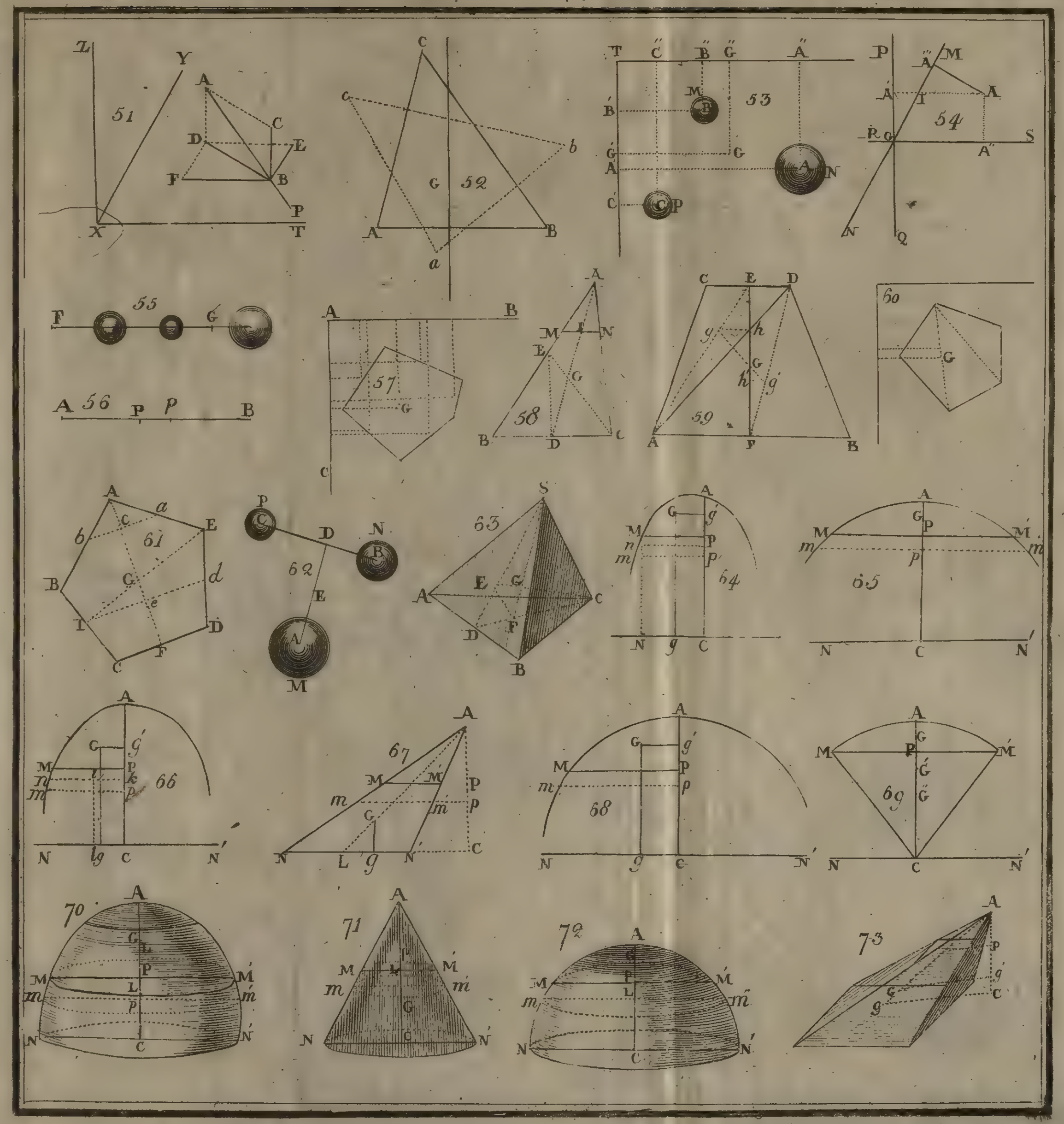


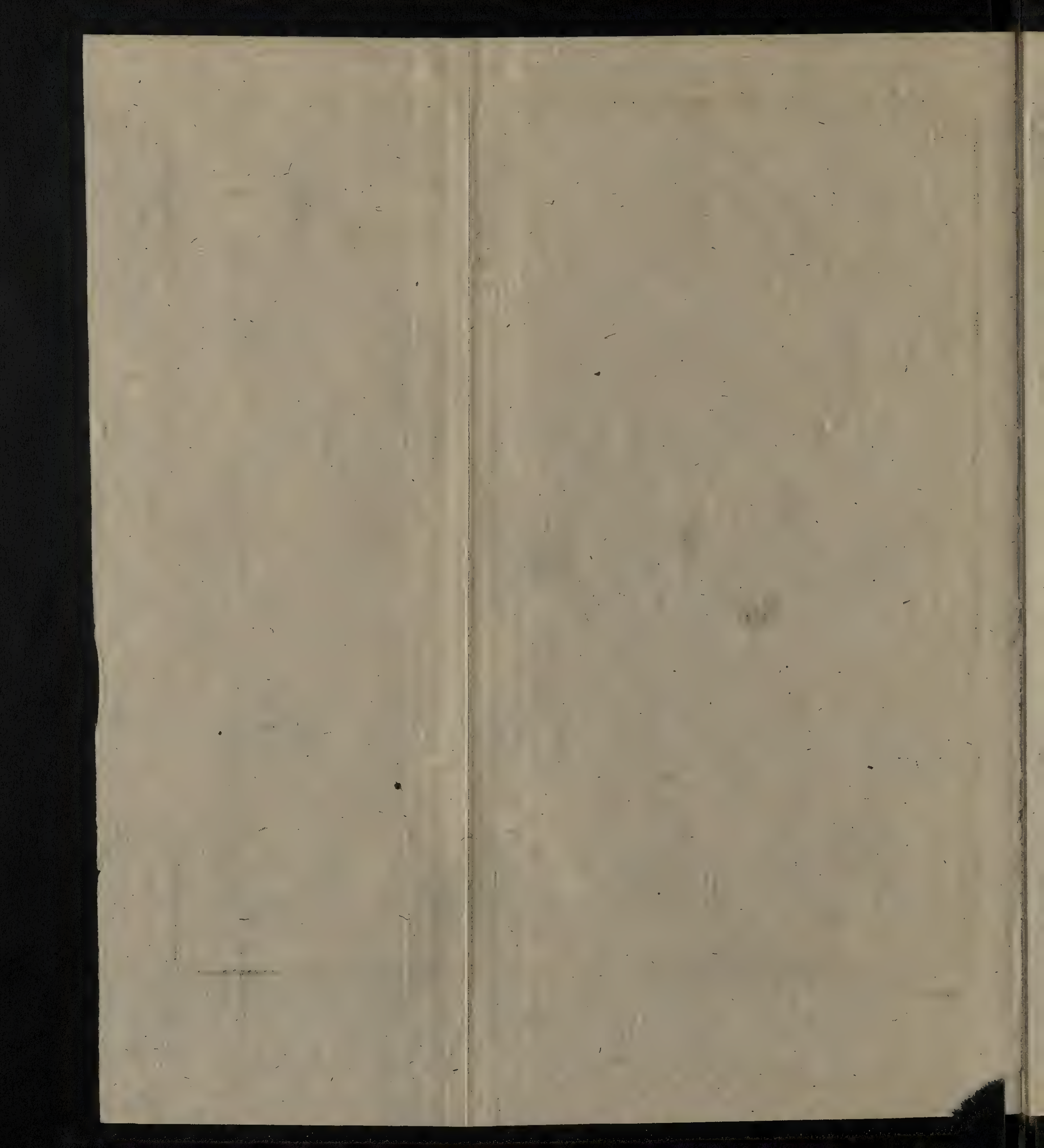

18
19
20
21
22
24
25
27
28
29
30
31
32

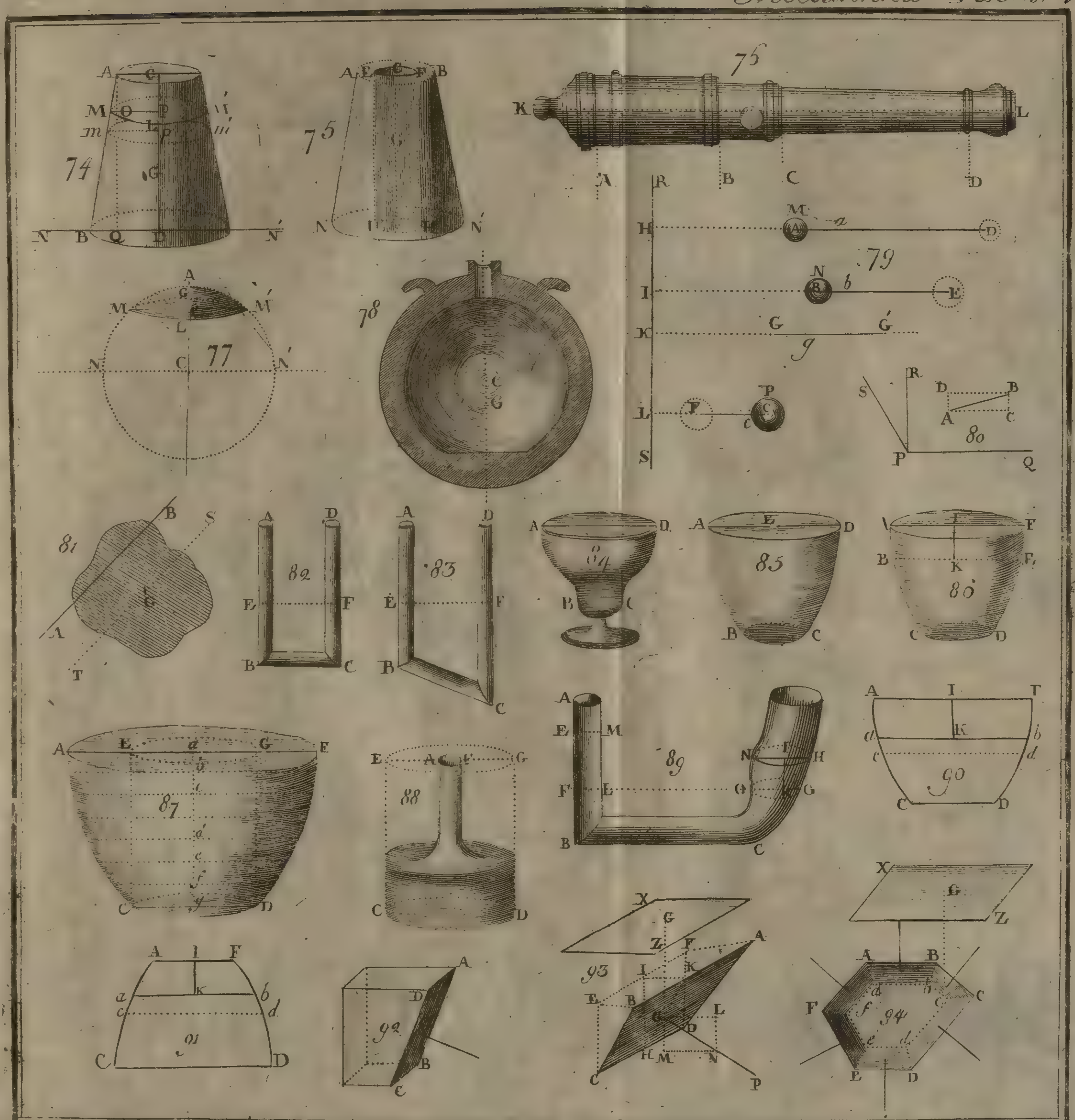


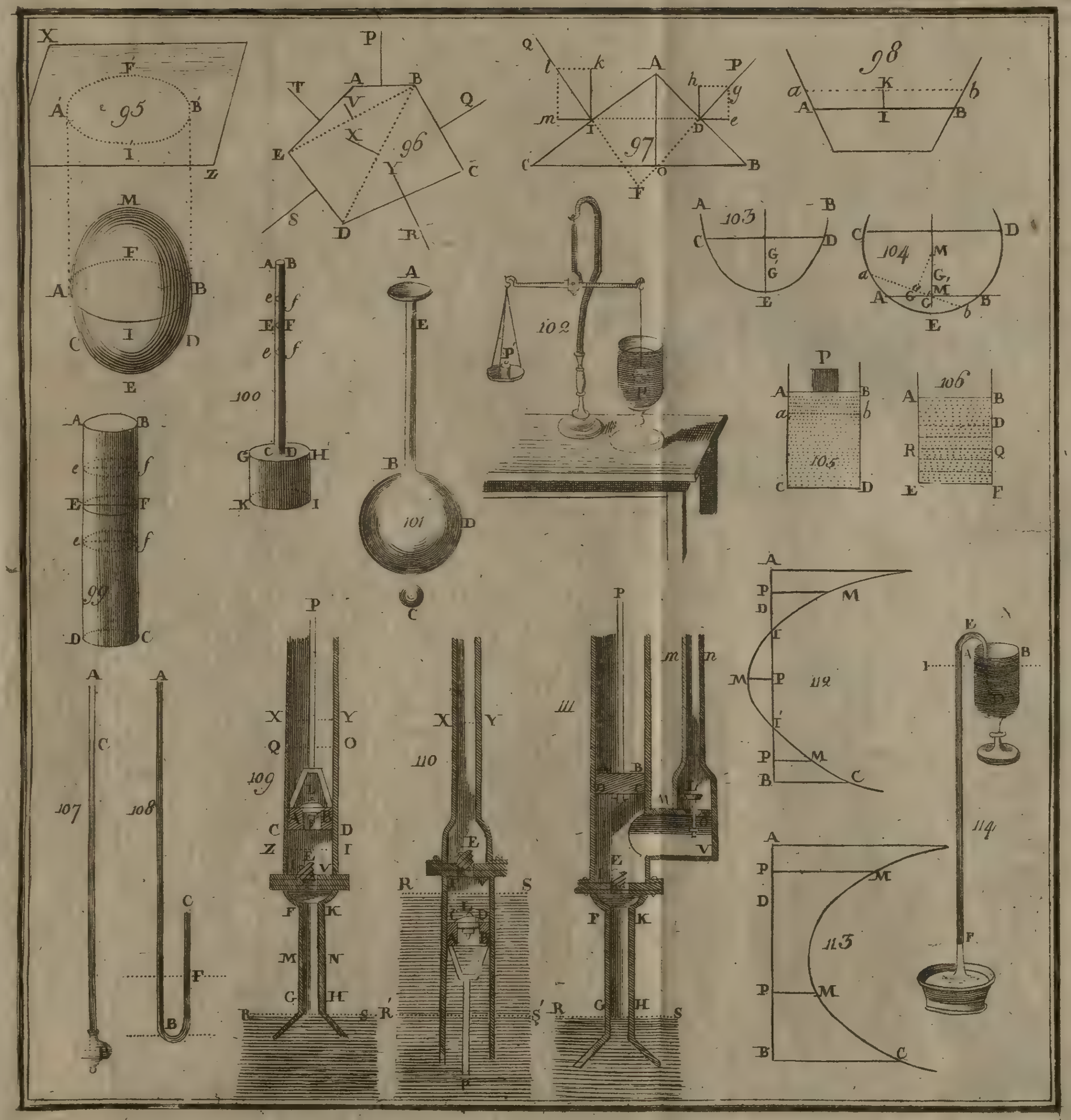


Механика Табл. IV.






74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94


95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114

